А. А. Ляминъ.

Физико-Математическая Хрестоматія.

Томъ III.

Геометрія.

КНИГА 1-я.

Москва.
Изд. фирмы „Сотрудникъ школъ" А. К. Залѣсской.
1914.

Цѣна 1 р. 25 к.

А. А. Ляминъ.

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ХРЕСТОМАТІЯ.

ТОМЪ III.

ГЕОМЕТРІЯ.

КНИГА 1-Я.

Цѣна 1 руб. 25 коп.

Изданіе „СОТРУДНИКЪ ШКОЛЪ"
А. К. Залѣсской.
Воздвиженка, домъ Арманда. Телеф. 34-23.
МОСКВА.

МОСКВА,
Типографія П. П. Рябушинскаго, Путинковскій пер., собств. домъ.
1914 г.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Область интереснаго въ математикѣ безгранична и многообразна; подходя къ ней, не слѣдуетъ страшиться тайнъ ея глубинъ, а стараться преодолѣть возникающія трудности, руководствуясь свѣтомъ знанія и строгой логикой ясной мысли.

Затрудненія, возникающія при ознакомленіи со многими вопросами математики, являются главнымъ образомъ въ силу того, что приступающій къ изученію этихъ вопросовъ дѣлаетъ это съ искусственно притупленной способностью воспріятія, такъ какъ очевидные недостатки программъ и методовъ преподаванія являются причиной отсутствія должной подготовки и необходимыхъ знаній; широкіе горизонты завоеваній человѣческой мысли обыкновенно бываютъ скрыты отъ изучающихъ математику и они не умѣютъ уважать и съ благоговѣніемъ произносить имена тѣхъ, кому человѣчество обязано открытіями и завоеваніями мысли въ области науки.

Но не менѣе трудна и популяризація математическихъ знаній.

При составленіи этого тома Физико-Математической Хрестоматіи наиболѣе ярко выяснилось, какъ трудно собрать необходимый матеріалъ, съ какими затрудненіями связано выдѣленіе изъ него наиболѣе существеннаго и доступнаго пониманію неподготовленнаго читателя. Вслѣдствіе этого пришлось привлечь къ сотрудничеству цѣлый рядъ лицъ, любезно согласившихся принять участіе въ составленіи этого тома хрестоматіи.

Совмѣстная работа выяснила невозможность включенія всего собраннаго матеріала въ одну книгу, какъ въ силу рѣзкаго различія статей по содержанію трактуемыхъ вопросовъ, такъ и въ

силу значительнаго количества самыхъ статей. Поэтому III томъ Физико-Математической Хрестоматiи раздѣленъ на двѣ книги; въ первую вошли статьи, относящiяся къ различнымъ отдѣламъ элементарнаго курса геометрiи, а во вторую — рядъ очерковъ по высшей геометрiи.

Изъ статей, вошедшихъ въ этотъ томъ хрестоматiи, «Очеркъ изъ исторiи геометрiи» составилъ инж. Я. Ц. Гинзбургъ, «Геометрическiе парадоксы и паралогизмы», «Мосты и острова, вычерчиванiе фигуръ съ одного почерка, лабиринты» и «Задачи на вычисленiе геометрической вѣроятности» составлены С. Я. Турлыгинымъ, «Симметрiя и ея проявленiя въ природѣ» составлены С. М. Терешенковымъ, «Аналитическая геометрiя на плоскости и въ пространствѣ» составлена Аг. О. Солоновичъ, а остальныя статьи явились результатомъ коллективнаго сотрудничества цѣлаго ряда другихъ лицъ.

Всѣ статьи написаны по указанiямъ, планамъ и подъ общей редакцiей А. А. Лямина.

Въ концѣ второй книги III тома приложенъ библiографическiй указатель большей части книгъ и журналовъ, служившихъ матерiаломъ при составленiи статей этого тома.

Изъ исторіи развитія геометріи*).

Исторія геометріи представляетъ собой особый интересъ, какъ яркое, краснорѣчивое доказательство творческой силы человѣка и геніальности его ума; она намъ указываетъ, какъ изъ смутнаго понятія первобытнаго человѣка о пространствѣ, постепенно, мало-по-малу, развилась та изящная, грандіозная картина человѣческаго знанія, яснаго и отчетливаго представленія формъ и пространства, какую мы имѣемъ въ строгихъ, логическихъ твореніяхъ геніальныхъ мыслителей, великихъ геометровъ и знаменитѣйшихъ математиковъ древняго и новаго міра. Геометрія—самая серьезная, глубокая и обширная область математики, создавалась величайшими умами, каковы, напр., Өалесъ, Пиөагоръ, Гиппократъ, Эвклидъ, Аполлоній, Архимедъ, Птоломей, Паскаль, Декартъ, Гауссъ, Лобачевскій, Риманъ и др.

Понятія о пространствѣ, формѣ и положеніи принадлежатъ къ числу первоначальныхъ. Съ ними человѣкъ долженъ былъ быть знакомъ уже тогда, когда его жизнь еще очень мало отличалась отъ жизни животнаго; эти первоначальныя представленія

---

*) Матеріаломъ при составленіи этой статьи послужили слѣдующія книги.

М. Е. Ващенко-Захарченко. «Исторія математики». Т. I. Кіевъ. 1883.

М. Шаль. Историческій обзоръ происхожденія и развитія геометрическихъ методовъ. Пер. съ фр. Москва. 1883.

Проф. Ф. Кеджори. «Исторія элементарной математики». Пер. съ англ. Изд. Mathesis. Одесса. 1910.

Е. Фурре. Очеркъ исторіи элементарной геометріи. Пер. А. И. Бакова. Одесса. 1912. Изд. Mathesis.

Энциклопедическій словарь Брокгауза и Ефрона.

И. Бѣлянкинъ. Краткій очеркъ развитія математики. Кіевъ. 1908.

Prof. A. Sturm. «Geschichte der Matematik». Leipzig. G. F. Göschens' Verlagshandlung. 1911.

о формѣ и пространствѣ повидимому заходятъ въ очень далекое прошлое.

Раскопки даютъ намъ рѣдкія, необыкновенныя вазы, металлическіе приборы причудливой формы и т. п., указывающіе, что пространственныя представленія входили въ кругъ понятій человѣка еще въ доисторическія времена.

Когда человѣкъ началъ заниматься не только окружающимъ его, но и размышлять о немъ, отыскивать различныя причины явленій, то онъ, повидимому, былъ склоненъ довольствоваться первымъ попавшимся объясненіемъ, создавая при этомъ цѣлые фантастическіе образы, въ которые, можетъ быть, вѣрилъ и самъ. Наиболѣе понятно было для него собственное существо, съ которымъ онъ отождествлялъ и другіе одушевленные и неодушевленные предметы. Не удивительно поэтому, что геометрія, какъ и вся древняя наука, тѣсно переплеталась съ фантастическими вѣрованіями, воззрѣніями, понятіями и взглядами древнихъ на проявленія силъ природы. Въ геометрическія представленія такимъ образомъ былъ внесенъ элементъ суевѣрія. Въ болѣе позднее время, когда геометрія уже приняла болѣе логическій и строгій научный характеръ, она постепенно освободилась и отъ всего чуждаго ей, непонятнаго и неяснаго, отъ всего мистическаго и гадательнаго.

Наконецъ, когда человѣческій разумъ достаточно расширилъ свои горизонты, ему удалось проникнуть въ новыя области математики, вооружившись тонкими, могучими методами изслѣдованія, доведя область познанія пространства до пышнаго расцвѣта.

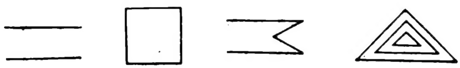
Понятіе о томъ, что прямая линія есть кратчайшее разстояніе между двумя точками, вѣроятно сложилось въ умахъ первобытнаго человѣчества еще на самой низкой ступени его умственнаго развитія.

Уже на зарѣ цивилизаціи человѣчество изъ обыденной жизни должно было имѣть понятіе о простѣйшихъ фигурахъ, каковы, напр. треугольникъ, четыреугольникъ и т. под.; но, понятно, что оно еще было весьма далеко отъ знанія даже самыхъ простыхъ ихъ свойствъ. Первоначальныя основы математическихъ наукъ вообще возникли тогда, когда человѣкъ получилъ понятіе

о мѣрѣ и числѣ. Съ теченіемъ времени, путемъ опыта и наблюденія, онъ находилъ, для отдѣльныхъ случаевъ, извѣстныя свойства фигуръ принималъ ихъ за правила. Всего чаще человѣчеству приходилось встрѣчаться со свойствами тѣлъ и фигуръ въ дѣлѣ воздвиганія построекъ; поэтому первоначально геометрія и носила чисто практическій характеръ и была тѣсно связана съ развитіемъ архитектуры.

Родиной геометріи, какъ и всей нашей цивилизаціи вообще, считается Востокъ, при чемъ думаютъ, что геометрія первоначально возникла у халдеевъ и египтянъ, какъ у народовъ, раньше другихъ достигшихъ высокой степени культуры.

Халдеи. Наши свѣдѣнія о геометрическихъ познаніяхъ древнихъ халдейскихъ ученыхъ слишкомъ скудны, такъ какъ до насъ дошелъ только одинъ отрывокъ сочиненія геометрическаго содержанія, которое принадлежало библіотекѣ Ассурбанипала *). Судя по этому единственному памятнику, изданному и объясненному Сэйсомъ, геометрическія фигуры у халдеевъ имѣли значеніе гадательныхъ знаковъ, служившихъ для предсказанія будущаго. Въ этомъ памятникѣ старины мы встрѣчаемъ парал-



Черт. 1.

лельныя линіи (названныя двойными линіями), квадратъ, фигуру съ входящимъ угломъ и систему трехъ треугольниковъ съ соотвѣтственно параллельными сторонами. Указаній на то, что халдеямъ былъ извѣстенъ прямоугольный треугольникъ въ памятникѣ не имѣется. Сопровождающій фигуры текстъ содержитъ сумерійское слово «тим»—что обозначало сперва «веревка», а потомъ «прямая линія». Отсюда выводятъ заключеніе, что у вавилонянъ и у ассиріянъ существовалъ, какъ и у египтянъ, способъ измѣренія при помощи веревки. Встрѣчающійся въ текстѣ символъ ⋇ Сейсъ переводитъ, какъ «угловой градусъ»,

*) См. халдеи—стр. 8 алгебраической хрестоматіи.

на томъ основанiи, что халдейскимъ геометрамъ было извѣстно дѣленiе окружности на 6 равныхъ частей, и указанный символъ имѣетъ отношенiе къ такому раздѣленiю, такъ какъ три симметрично пересѣкающiяся прямыя дѣлятъ кругъ на шесть равныхъ частей. По понятiямъ халдеевъ, длина окружности равна шести радiусамъ или тремъ дiаметрамъ; такимъ образомъ они принимали величину π равной 3.

Прямой уголъ былъ также извѣстенъ халдеямъ и не только въ примѣненiяхъ къ строительному искусству, но и къ геометрiи. Смитъ упоминаетъ о найденной имъ глиняной табличкѣ геометрическаго содержанiя, на которой находится рѣшенiе задачи о трисекцiи прямого угла.

Вотъ почти все, что намъ извѣстно о состоянiи геометрiи у древнихъ халдеевъ. Одно несомнѣнно, развитiе геометрiи у халдеевъ было тѣсно связано съ каббалистическими воззрѣнiями и толкованiями, даваемыми ихъ учеными различнымъ геометрическимъ фигурамъ.

Египтяне. У египтянъ геометрiя зародилась при необходимости разбивать землю на участки. Древнѣйшимъ памятникомъ, позволяющимъ судить о геометрическихъ познанiяхъ египтянъ, является папирусъ изъ коллекцiи Ринда, написанный Ахмесомъ и прiобрѣтенный Британскимъ Музеемъ*). Отдѣлъ этого сочиненiя, посвященный геометрiи, представляетъ собой собранiе различнаго рода задачъ, большая часть которыхъ была взята изъ практики. Въ папирусѣ приведено вычисленiе площади четыреугольника и круга, при чемъ для опредѣленiя площади круга авторъ папируса Ринда находитъ площадь квадрата, равновеликаго кругу, для чего онъ дiаметръ круга дѣлитъ на 9 равныхъ частей, беретъ изъ нихъ 8 и полагаетъ, что площадь круга равна $\left(\frac{8}{9}D\right)^2$, или $\frac{64}{81}D^2$, гдѣ D—дiаметръ круга. Сравнивъ этотъ результатъ съ общеизвѣстнымъ выраженiемъ площади круга $\frac{\pi D^2}{4}$, можемъ

---

*) О папирусѣ Ринда см. стр. 6 алгебраической хрестоматiи.

написать, что $\frac{64}{81} D^2 = \frac{\pi D^2}{4}$, или $\frac{\pi}{4} = \frac{64}{81}$, откуда $\pi = \frac{256}{81} = 3,16$. Такимъ образомъ для π получается величина, близкая къ $\frac{22}{7}$, впослѣдствіи найденная Архимедомъ существенно другимъ пріемомъ. Кромѣ того, въ папирусѣ даются правила измѣренія объемовъ и вмѣстимости различныхъ помѣщеній, служащихъ для сохраненія зерна и фруктовъ. Надо замѣтить, что эти помѣщенія имѣли въ разрѣзѣ четыреугольную или круглую форму; ихъ объемъ находился умноженіемъ площади основанія на высоту.

Въ папирусѣ Ринда находится кромѣ того окружность, внутри которой изображено число 9. На египетскомъ языкѣ названія окружности и цифры 9 тождественны. Предполагаютъ, что причиной этому было дѣленіе круга на 9 равныхъ частей, для нахожденія его площади.

Часть папируса, относящаяся къ геометріи, озаглавлена: *«Указанія для вычисленія полей»* и представляетъ геометрію въ этимологическомъ его смыслѣ—т.-е. *землемѣріе*.

Пріемы, приложенные къ измѣренію полей, весьма приближенны; ихъ точность была достаточна только для сельскихъ хозяевъ; такъ, напримѣръ, площадь четыреугольника получалась умноженіемъ двухъ его сторонъ другъ на друга, а площадь равнобедреннаго треугольника находилась умноженіемъ одной изъ его боковыхъ сторонъ на половину основанія. Но египетскимъ геометрамъ были извѣстны и болѣе точные формулы и пріемы для измѣренія полей, о чемъ свидѣтельствуютъ іероглифическія надписи на стѣнахъ храма, въ Едфу.

Въ папирусѣ Ахмеса, кромѣ того, есть глава, посвященная вычисленію пирамидъ; въ ней авторъ, разсматривая различныя соотношенія между различными частями пирамиды, обнаруживаетъ нѣкоторыя свѣдѣнія о *подобныхъ фигурахъ и пропорціональности*. Ребро пирамиды египетскіе математики называли piremus; Эйзенлоръ предполагаетъ, что отсюда и произошло греческое названіе—*пирамида*.

При закладкахъ различныхъ храмовъ для правильности постройки, египтяне прибѣгали къ особому способу, называв-

шемуся «натягиваніемъ веревки». Для этого они при помощи астрономическихъ наблюденій опредѣляли полуденную линію, а затѣмъ строили линію, составляющую съ первой прямые углы. Это построеніе выполнялось обыкновенно при помощи веревки, натянутой около трехъ деревянныхъ кольевъ, расположенныхъ такъ, чтобы стороны полученнаго такимъ образомъ треугольника относились между собою, какъ 3 : 4 : 5 (такъ называемый египетскій треугольникъ), и чтобы одинъ изъ катетовъ совпадалъ съ линіей меридіана. Другой катетъ, опредѣляя линію востока и запада, давалъ возможность правильно построить храмъ.

Изъ сказаннаго видно, что египтяне умѣли производить геометрическія построенія; объ этомъ свидѣтельствуютъ также и фигуры на гробницахъ и стѣнахъ храмовъ; такова, напримѣръ, фигура, составленная изъ параллелограммовъ и представляющая собою также параллелограммъ (4000 лѣтъ до Р. Х.) и т. д.

Характерно то, что сохранившіяся фигуры и изображенія различныхъ предметовъ поражаютъ полнымъ отсутствіемъ въ нихъ перспективы. Но несомнѣнно, что египетскіе художники были основательно знакомы съ *пропорціональностью* и умѣли искусно изображать предметы и фигуры въ уменьшенномъ масштабѣ.

Китайцы. Вслѣдствіе малой доступности памятниковъ китайской старины свѣдѣнія о состояніи математическихъ знаній у китайцевъ очень скудны.

Древнѣйшій изъ сохранившихся памятниковъ математики китайцевъ относится, по словамъ самихъ китайцевъ, къ 2637 г. до Р. Хр. и носитъ названіе: «Девять отдѣловъ ариѳметики». Въ немъ между прочимъ имѣется отдѣлъ, озаглавленный «измѣреніе полей». Въ этомъ отдѣлѣ излагается, какъ производятся ариѳметическія дѣйствія—умноженіе и дѣленіе. Затѣмъ даются способы измѣренія полей различныхъ формъ. Площадь треугольника опредѣляется посредствомъ умноженія его основанія на половину высоты. Для нахожденія площади круга приводится 6 способовъ, которые выражаются формулами: r^2; $\frac{1}{3}\pi^2 r^2$; $\frac{1}{12} . 4\pi^2 r^2$; $\frac{1}{4} . 3 . 4r^2$; $\frac{1}{4} . 2r . 2\pi . r$; $3r^2$. Отношеніе окружности къ діаметру принимается равнымъ 3.

Въ другомъ отдѣлѣ разсматриваются способы измѣренія объемовъ пирамидъ, конусовъ и т. п. Въ этомъ же отдѣлѣ приводится рѣшеніе нѣкоторыхъ стереометрическихъ задачъ: построеніе стѣнъ, зданій, башенъ, рвовъ, укрѣпленій и т. п.

Другое сочиненіе, позволяющее судить о состояніи геометріи у древнихъ китайцевъ называется «Тшіу-Пи» и составлено около 1100 г. до Р. Хр. въ формѣ діалога между авторомъ сочиненія Тшіу-Кунгомъ и знатнымъ лицомъ Шангъ-Кау.

Въ «Тшіу-Пи» утверждается, напр., что искусство считать можетъ быть сведено на кругъ и квадратъ, что кругъ произошелъ отъ квадрата, а квадратъ отъ прямого угла (т.-е. отъ прямоугольнаго треугольника). Тамъ говорится, что если разложить прямоугольный треугольникъ на его составныя части и положить, что катеты его (ширина и длина) равны 3 и 4, то третья сторона будетъ=5 *); что если сдѣлать изъ «внѣшнихъ» сторонъ прямоугольнаго треугольника прямоугольникъ, то половина этого прямоугольника будетъ равна площади треугольника, и что наука, при помощи которой устроено все, находящееся подъ небомъ (т.-е. въ Китаѣ) основана на числахъ 3, 4 и 5.

Въ «Тшіу-Пи», между прочимъ, утверждается, что прямой уголъ (прямоугольный треугольникъ) составленъ изъ трехъ неизогнутыхъ линій, что при посредствѣ горизонтально-лежащаго прямого угла измѣряются разстоянія, что вращеніемъ прямого угла получаютъ окружность, что квадратъ принадлежитъ землѣ, а кругъ небу, потому что небо круглое, а земля квадратная.

По «Тшіу-Пи», площадь круга изображаетъ собою небо; цвѣтъ неба темно-синій, цвѣтъ земли желто-красный. Площадь круга образована сочетаніемъ небесныхъ соотношеній между числами: снаружи она синяя и черная, внутри красная и желтая. Знакомый съ землей можетъ считаться ученымъ, а знакомый съ небомъ—мудрецомъ. Знаніе этого основано на прямой линіи.

Прямая линія есть часть прямого угла, а численныя соотношенія между частями прямого угла могутъ быть приложены ко всѣмъ фигурамъ.

---

*) Это видоизмѣненная, своеобразная формулировка теоремы Пиѳагора.

Позднѣйшія сочиненія китайцевъ по математикѣ написаны въ эпоху, когда уже могло имѣть мѣсто вліяніе арабовъ и индусовъ, и въ нихъ трактуются, главнымъ образомъ, вопросы практической геометріи.

Греки. Правильность и простота въ размѣрахъ частей различныхъ египетскихъ сооруженій перешла и къ грекамъ, у которыхъ геометрія достигла высокаго развитія и, вѣроятно, исключительно грекамъ геометрія обязана возведеніемъ въ *науку* чисто *умозрительную*. Первоначальныя познанія древнихъ грековъ въ геометріи были, вѣроятно, весьма ничтожны и заключались въ знаніи самыхъ простыхъ геометрическихъ истинъ, необходимыхъ при производствѣ построекъ. Съ болѣе сложными правилами греки познакомились только въ VII в. до Р. Хр., когда начинаются путешествія ихъ философовъ въ Египетъ. Почерпнутое у египетскихъ жрецовъ передавалось греческими философами въ различныхъ школахъ, изъ которыхъ древнѣйшая возникла въ Малой Азіи, въ Милетѣ, и была извѣстна подъ названіемъ *іонійской* *). Представителемъ этой школы является *Θалесъ* изъ Милета (640—556 до Р. Хр.) одинъ изъ «семи греческихъ мудрецовъ». Ему приписывается открытіе теоремъ о равенствѣ вертикальныхъ угловъ, о равенствѣ угловъ при основаніи равнобедреннаго треугольника, о томъ, что кругъ дѣлится діаметромъ пополамъ, о равенствѣ треугольниковъ по сторонѣ и двумъ прилежащимъ угламъ.

Плутархъ утверждаетъ, что Θалесъ скоро превзошелъ по своимъ знаніямъ египетскихъ жрецовъ и привелъ въ удивленіе египетскаго царя Амазиса, измѣривъ высоты пирамидъ по отбрасываемымъ имъ тѣнямъ. Θалесъ первый вписалъ въ окружность прямоугольный треугольникъ и за это, какъ говоритъ легенда, принесъ богамъ въ жертву быка.

Вслѣдъ за Θалесомъ въ іонійской школѣ славились геометры Анаксименъ и Анаксимандръ.

---

*) Эвдемъ, ученикъ Аристотеля, написалъ исторію геометріи, извѣстную подъ названіемъ «Эвдемова Обзора». Эта исторія утеряна, но до насъ дошли извлеченія изъ нея, приведенныя Прокломъ въ его комментаріи на Эвклида; важнѣйшія наши свѣдѣнія о состояніи геометріи въ древнихъ философскихъ школахъ Греціи основаны на извлеченіяхъ Прокла изъ «Эвдемова Обзора», а также на отдѣльныхъ цитатахъ греческихъ и латинскихъ авторовъ.

Ученикъ Анаксимена, Анаксагоръ, послѣдній представитель іонійской школы, замѣчателенъ своей попыткой, во время заключенія въ темницѣ, найти *квадратуру круга*.

Болѣе замѣчательна *пиѳагорейская* школа, названная такъ по имени своего основателя Пиѳагора (ум. въ 500 г. до Р. Хр.). Жизнь Пиѳагора окутана густымъ мистическимъ туманомъ. Достовѣрно лишь извѣстно, что родиной Пиѳагора былъ Самосъ, что онъ путешествовалъ по Египту, посѣтилъ Вавилонъ, переселился въ Кротонъ (въ Южной Италіи), гдѣ и основалъ знаменитое «Пиѳагорейское братство», давъ ему уставъ, приближающійся по своимъ особенностямъ къ правиламъ масонскихъ ложъ. Членамъ этого братства запрещалось разглашать открытія и ученія своей школы. Поэтому невозможно сказать, кому именно слѣдуетъ приписывать различныя открытія пиѳагорейцевъ. Среди пиѳагорейцевъ существовалъ обычай приписывать всѣ открытія великому основателю секты. Самому Пиѳагору слѣдуетъ приписать открытіе хорошо всѣмъ извѣстнаго свойства сторонъ прямоугольнаго треугольника.

Кромѣ того Пиѳагору приписываютъ также одно изъ величайшихъ математическихъ открытій древняго міра—открытіе *ирраціональныхъ количествъ*. Полагаютъ, что открытіе это явилось результатомъ разсмотрѣнія равнобедреннаго прямоугольнаго треугольника, съ катетомъ, равнымъ единицѣ. Пиѳагорейцы замѣтили, что гипотенуза (при нашемъ обозначеніи равная $\sqrt{2}$) точно не можетъ быть представлена никакимъ извѣстнымъ имъ числомъ.

Пиѳагорейцы были знакомы съ нѣкоторыми свойствами *правильныхъ многоугольниковъ*. Извѣстно, что звѣздчатый правильный пятиугольникъ служилъ знакомъ принадлежности къ пиѳагорейскому союзу. Знакомство съ правильнымъ пятиугольникомъ предполагаетъ умѣнье раздѣлить радіусъ въ крайнемъ и среднемъ отношеніи (золотое дѣленіе). Въ области стереометріи пиѳагорейская школа развила ученіе о *правильныхъ тѣлахъ*. По сообщенію Прокла, Пиѳагоръ построилъ такъ называемыя *космическія фигуры*, т.-е. тетраэдръ, октаэдръ, кубъ и икосаэдръ, которые представляли соотвѣтственно четыре стихіи природы: огонь, воздухъ, землю и воду. Существуетъ преданіе, что Гип-

пазъ погибъ въ морѣ потому, что разгласилъ тайну о «шарѣ съ двѣнадцатью пятиугольниками».

Пиѳагоръ утверждалъ, что изъ всѣхъ тѣлъ прекраснѣйшее— шаръ, а изъ плоскихъ фигуръ—кругъ.

Значеніе пиѳагорейской школы лучше всего характеризуется словами Эвдема: «Пиѳагоръ преобразовалъ науку геометріи въ форму свободнаго ученія, потому что онъ разобралъ принципы ея до самаго основанія и изслѣдовалъ ея теоремы не вещественнымъ и разумнымъ путемъ».

Около 400 г. до Р. Хр. центръ математическаго знанія переносится въ Аѳины. *Софисты* и среди нихъ Гиппій, подготовили почву для аѳинской школы математиковъ, связанной съ именами Гиппократа, Платона, Эвдоха и Менехма.

Аѳинская школа занималась преимущественно тремя задачами: удвоеніемъ куба, трисекціей угла и квадратурой круга.

Никакія другія математическія задачи не изучались такъ усердно и упорно, какъ эти три. Надъ этими задачами трудились безуспѣшно лучшіе умы прошедшихъ временъ. Впослѣдствіи и арабы тщетно прилагали къ нимъ свою ученость, и мудрые люди эпохи возрожденія боролись съ этими трудностями, пока не пришли къ мысли, подтвержденной потомъ строгими доказательствами, что задачи эти не могутъ быть рѣшены *исключительно при помощи циркуля и линейки* (*при конечномъ числѣ построеній*), *безъ всякихъ другихъ инструментовъ*, какъ того требовали греки. Греками построеніе не считалось *геометрическимъ*, если задача рѣшалась посредствомъ черченія эллипсовъ, параболъ, гиперболъ и кривыхъ высшихъ порядковъ.

Пиѳагорейцы показали, что площадь квадрата, построеннаго на діагонали другого квадрата, вдвое больше даннаго квадрата. По аналогіи стали искать сторону куба, который бы имѣлъ объемъ, вдвое большій, чѣмъ объемъ даннаго куба.

Гиппократъ Хіосскій (около 430 г. до Р. Хр.) первый показалъ, что задачу удвоенія куба нельзя рѣшить стереометрически, и что она можетъ быть сведена къ планиметрическому построенію, а именно къ нахожденію двухъ среднихъ пропорціональныхъ между даннымъ отрѣзкомъ прямой и нѣкоторымъ другимъ, т.-е. къ нахожденію двухъ отрѣзковъ, которые, будучи

вставлены между двумя данными, составили бы вмѣстѣ съ ними геометрическую прогрессію*). Но Гиппократу, понятно, не удалось отыскать сторону удвоеннаго куба съ помощью *геометрическаго* построенія. Занимаясь усердно квадратурой круга, Гиппократъ подвинулъ впередъ геометрію круга вообще. Кромѣ того, Гиппократъ достаточно извѣстенъ квадратурой своихъ луночекъ. Онъ первый написалъ *учебникъ* по элементарной геометріи.

Въ исторіи квадратуры круга еще заслуживаетъ вниманія Антифонъ, такъ какъ онъ первый коснулся вопроса, служившаго предметомъ горячихъ споровъ между философами того времени, отрицавшими возможность совпаденія многоугольника и круга. Существовало мнѣніе, что прямая линія никогда не можетъ совпасть съ окружностью своею частью**). Антифонъ вписывалъ въ окружность квадратъ и строилъ на сторонахъ его равнобедренные треугольники съ вершинами на окружности, на этихъ сторонахъ опять строилъ равнобедренные треугольники и т. д., иначе говоря онъ вписывалъ въ окружность правильные многоугольники о 8, 16, 32, 64... и т. д. сторонахъ, пока не получится многоугольникъ, стороны котораго совпали бы съ окружностью круга. Этимъ самымъ онъ положилъ начало могущественному *способу предѣловъ*, оказавшему впослѣдствіи неоцѣнимыя услуги геометріи. Способъ этотъ былъ извѣстенъ у грековъ подъ названіемъ *метода исчерпываній*.

Платонъ (ум. въ 348 г. до Р. Хр.), въ противоположность своему учителю Сократу, утверждавшему, что «геометрію надо знать настолько, чтобы умѣть измѣрять свое поле», своимъ ученіемъ «далъ сильнѣйшій толчекъ къ развитію математики вообще и геометріи въ частности, пробуждалъ постоянно рвеніе къ этой наукѣ у тѣхъ, кто отдавался философіи» (Проклъ). Какое значеніе придавалось Платономъ вліянію математики на развитіе ума вообще, лучше всего видно изъ знаменитой надписи на фронтонѣ основанной имъ Академіи: «Пусть сюда не входитъ тотъ, кто незнакомъ съ геометріей».

*) См. статью о знаменитыхъ задачахъ древности.

**) Предложенное Антифономъ рѣшеніе задачи—не есть собственно квадратура круга, а представляетъ преобразованіе круга въ прямолинейную фигуру.

Платонъ былъ изобрѣтателемъ *аналитическаго метода* доказательства, заключавшагося въ томъ, что данная теорема предполагалась доказанной и изъ этого предположенія выводился рядъ слѣдствій, дававшихъ изслѣдователю руководящую нить для рѣшенія вопроса.

Далѣе можно указать на Эвдоха Книдскаго (407—355 г. до Р. Хр.), извѣстнаго своими трудами въ области геометріи. Онъ значительно увеличилъ число общихъ теоремъ, далъ строгую теорію пропорцій, обосновалъ такъ-называемое «золотое дѣленіе» (*дѣленіе въ крайнемъ и среднемъ отношеніи*) и, по словамъ Архимеда, доказалъ, что пирамида *составляетъ* одну треть призмы, а конусъ треть цилиндра, имѣющихъ съ ними одинаковыя основаніе и высоту.

Урокъ математики въ древней Греціи.

Ученикъ Эвдоха и учитель Александра Македонскаго — Менехмъ (375—325 г. до Р. Хр.), открылъ коническія сѣченія, при чемъ разсматривалъ ихъ не какъ плоскія кривыя, а какъ линіи, начерченныя на конусѣ, прилагая ихъ свойства къ рѣшенію задачи о нахожденіи двухъ средне-пропорціональныхъ между двумя отрѣзками прямыхъ.

Послѣ покоренія Аѳинъ Филиппомъ Македонскимъ цвѣтъ греческой учености переносится въ Александрію, основанную Александромъ Великимъ. Искусный сподвижникъ Александра, Птоломей, сумѣлъ привлечь въ Александрію наиболѣе замѣчательныхъ людей того времени. Первые цари изъ династіи Птоломеевъ были друзьями наукъ, содѣйствовали просвѣщенію, не боялись его и своими щедрыми пожертвованіями создали великолѣпныя учрежденія для содѣйствія развитію умственной

дѣятельности и для болѣе близкаго ознакомленія съ явленіями природы.

Центральной фигурой Александрійской школы, быть можетъ даже ея основателемъ, былъ *Эвклидъ*. Эпоха, которую открываетъ собою Эвклидъ, была *золотымъ вѣкомъ* греческой геометріи. Жизнь Эвклида намъ почти неизвѣстна. Изъ того, что находимъ о немъ у греческихъ и арабскихъ писателей, извѣстно, что онъ былъ однимъ изъ первыхъ, приглашенныхъ преподавать въ знаменитомъ Александрійскомъ Университетѣ, основанномъ Птоломеемъ I, царствовавшимъ отъ 323 до 283 г. до Р. Хр., что онъ былъ человѣкомъ мягкаго характера, скромнымъ и вполнѣ независимымъ въ своихъ отношеніяхъ къ Птоломею.

Эвклидъ является авторомъ нѣсколькихъ трудовъ по математикѣ и физикѣ, но слава его опирается на его сочиненіе по геометріи—такъ называемыя «Начала». «Начала» Эвклида въ теченіе многихъ столѣтій были единственнымъ руководствомъ въ школахъ. Они были основаніемъ математическаго образованія всѣхъ знаменитыхъ людей и великихъ математиковъ, каковы Паскаль, Ферматъ, Декартъ, Лейбницъ, Ньютонъ, Лагранжъ и многіе другіе. Ни одинъ писатель не находилъ себѣ столькихъ читателей и переводчиковъ, какъ Эвклидъ. Эвклидъ переведенъ на большую часть языковъ міра. Въ Англіи до самаго послѣдняго времени преподаваніе геометріи ведется непосредственно по Эвклиду, съ очень малыми отступленіями отъ подлиннаго текста.

Трактатъ Эвклида состоитъ изъ 15 книгъ. Первыя шесть книгъ посвящены планиметріи. Книга 5-я заключаетъ теорію пропорцій въ приложеніи къ величинамъ вообще. 6-я книга содержитъ ученіе объ отношеніи, подобіи фигуръ и пропорціональности отрѣзковъ. Въ книгахъ 7, 8 и 9 излагается ариѳметика или, правильнѣе, теорія чиселъ. 10-я книга содержитъ теорію несоизмѣримыхъ чиселъ. Содержаніе 11, 12 и 13 книгъ посвящено стереометріи. Книги 14 и 15 принадлежатъ не самому Эвклиду, а приписываются первая—Гиписиклу, а вторая—Дамасцію. Въ нихъ содержатся свойства правильныхъ многогранниковъ («платоническихъ фигуръ») и излагаются предложенія, относящіяся къ комбинаціямъ правильныхъ тѣлъ другъ съ другомъ.

Большую часть матеріала Эвклидъ заимствовалъ у выдающихся математиковъ, своихъ предшественниковъ. Но онъ приводитъ въ восторгъ своимъ строгимъ, логическимъ ходомъ мышленія. Онъ поражаетъ своей научной точностью. Эвклидъ замѣчателенъ, какъ образецъ самаго глубокаго синтеза древнихъ геометровъ. Въ «Началахъ» Эвклида находится строгое разграниченіе *опредѣленій*, *общихъ понятій* (аксіомъ)*), *допущеній* и *теоремъ*. Эвклидъ проводитъ различіе между общимъ понятіемъ и допущеніемъ въ томъ смыслѣ, что общее понятіе (аксіома), вслѣдствіе своей простоты и очевидности, не можетъ быть доказано, а допущеніе есть предложеніе не очевидное, но которое нельзя доказать по неуловимости его связи съ аксіомами и теоремами, изъ нихъ вытекающими. (Ващенко-Захарченко). Извѣстная, напримѣръ, одиннадцатая аксіома Эвклида есть допущеніе, которое необходимо сдѣлать для теоріи параллельныхъ линій. Отличительной чертой Эвклида является то, что онъ для доказательства теоремы никогда не производитъ построенія, не доказавъ предварительно возможности его выполненія на основаніи раньше изложенныхъ общихъ понятій или уже предварительно доказанныхъ теоремъ. Эвклидъ пользуется всѣми методами: *синтетическимъ*, *аналитическимъ*, *апологическимъ* (доказательствомъ отъ противнаго) и *методомъ предѣловъ*.

Эвклидъ изъ Мегары,
часто смѣшиваемый съ Эвклидомъ Александрійскимъ Этотъ портретъ былъ помѣщенъ въ одномъ старинномъ изданіи „Началъ".

---

*) Словомъ *аксіома* пользуется Проклъ, но его нѣтъ у Эвклида.

Эвклидъ, подобно всѣмъ геометрамъ до Архимеда, избѣгаетъ измѣренія величинъ. Эвклидова теорія пропорцій позволяетъ изучать соотношенія, не измѣряя самихъ величинъ; поэтому его опредѣленія площадей и объемовъ отличаются отъ нашихъ современныхъ опредѣленій.

Замѣчательно, что Эвклидъ не вычисляетъ объемовъ тѣлъ, въ образованіи которыхъ участвуетъ кругъ. У него вообще нигдѣ ничего не сказано о кругѣ. Кромѣ «Началъ», Эвклидъ написалъ еще и другія сочиненія: «Данныя», «Оптика», «Катоптрика», «Начала музыки» и «Гармоническія правила». Не дошли до насъ его произведенія: «Поризмы», «Перспектива», «Коническія сѣченія», «Мѣста на поверхности» и «О ложныхъ представленіяхъ».

По Шалю, трактатъ *о поризмахъ*—одно изъ наиболѣе замѣчательныхъ сочиненій Эвклида. Оно извѣстно намъ только по тѣмъ свѣдѣніямъ, которыя даны въ «Математическихъ коллекціяхъ» Паппа, писателя IV вѣка, а также по комментаріямъ Прокла на Эвклида.

Шаль опредѣляетъ поризму, какъ «предложеніе, въ которомъ высказывается нѣкоторая истина и при этомъ утверждается, что можно всегда найти извѣстныя вещи, которыя эту истину дополняютъ». Поризмы сходны, какъ по формѣ, такъ и по содержанію, съ большей частью предложеній новой геометріи.

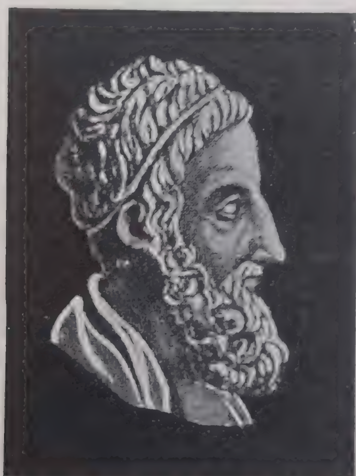
Въ Александрійской школѣ еще замѣчателенъ Кононъ, писавшій о «коническихъ сѣченіяхъ». Кононъ старался опредѣлить число точекъ, общихъ кругу и коническому сѣченію или общихъ двумъ несовпадающимъ коническимъ сѣченіямъ. Кононъ началъ писать о «спирали», но умеръ, не давъ доказательствъ найденныхъ имъ теоремъ.

Лекціи Конона заложили фундаментъ для математическихъ знаній величайшему математику древности, знаменитому Архимеду, творцу механики.

Архимедъ родился въ Сициліи въ 287 г. до Р. Хр. Нѣкоторые историки говорятъ, что онъ былъ родственникомъ сиракузскаго царя Гіерона. Полибій, Титъ-Ливій и Плутархъ разсказываютъ о необыкновенной и геніальной изобрѣтательности Архимеда, о построенныхъ имъ машинахъ и военныхъ орудіяхъ, причиняв-

шихъ большія потери римлянамъ, осаждавшимъ его родной городъ подъ предводительствомъ Марцелла.

Ни объ одномъ изъ геометровъ не сложилось столько удивительныхъ разсказовъ, изъ которыхъ одни относятся къ его необыкновенной способности сосредоточиваться на извѣстной мысли, забывая все окружающее, а другіе къ его геніальной изобрѣтательности. Цицеронъ разсказываетъ, что Архимедъ, находясь на одной изъ площадей Сиракузъ былъ настолько погруженъ въ изслѣдованія свойствъ начерченныхъ имъ на пескѣ геометрическихъ фигуръ, что не замѣтилъ взятія города римлянами. Увидѣвъ приближавшагося къ нему римскаго солдата, Архимедъ закричалъ: «Не испорти моихъ круговъ!» Солдатъ же, считая себя оскорбленнымъ, убилъ его. Римскій военачальникъ Марцеллъ, поклонникъ генія Архимеда, воздвигъ въ честь его гробницу, на которой изображенъ былъ шаръ, вписанный въ цилиндръ. Архимедъ погибъ въ 212 г. до Р. Хр., 75 лѣтъ отъ роду.



Архимедъ.
(286—212 до Р. Хр.).

До насъ дошли слѣдующія сочиненія Архимеда: «О шарѣ и цилиндрѣ», «Объ измѣреніи круга», «О коноидахъ и сфероидахъ» (о параоболоидѣ, гиперболоидѣ и эллипсоидѣ вращенія), «О гелисахъ» (спирали), «О равновѣсіи плоскихъ фигуръ и ихъ центрахъ тяжести», «О квадратурѣ параболы», «О числѣ песчинокъ», «О плавающихъ тѣлахъ» и «Леммы». Все, что содержатъ сочиненія Архимеда, принадлежитъ вполнѣ ему и есть результатъ его творческаго генія. Онъ началъ изслѣдованія въ той части гео-

метріи, которая до него не была затронута. Самъ Архимедъ изъ всѣхъ своихъ открытій больше всего цѣнилъ тѣ, которыя изложены въ книгѣ «О шарѣ и цилиндрѣ». Архимедъ доказалъ, что поверхность шара равна учетверенной площади большого круга, опредѣлилъ поверхность шарового сегмента, доказалъ, что объемъ и поверхность шара составляютъ $^2/_3$ объема и поверхности цилиндра, описаннаго около шара и т. п.

Обезсмертилъ свое имя Архимедъ и теоремами о кругѣ, доказавъ, что площадь круга равна площади прямоугольнаго треугольника, одинъ изъ катетовъ котораго равенъ радіусу круга, а другой—длинѣ окружности этого круга. Для нахожденія длины окружности онъ воспользовался методомъ предѣловъ; находя верхній и нижній предѣлы вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ, онъ пришелъ къ выводу, что отношеніе окружности къ діаметру заключается между числами $3^1/_7$ и $3^{10}/_{71}$. Методомъ предѣловъ онъ пользуется и для опредѣленія поверхностей и объемовъ цилиндра и конуса, описывая и вписывая эти тѣла соотвѣтственно въ призму и пирамиду, число граней которыхъ безгранично возрастаетъ.

У Архимеда мы находимъ первую идею безконечнаго дробленія величинъ (дифференціалы), и суммированіе ихъ (интегралы). Въ нашемъ краткомъ историческомъ очеркѣ нѣтъ даже возможности перечислить всѣ великія открытія Архимеда въ различныхъ областяхъ математики, его остроумныя, геніальныя изобрѣтенія въ области механики. Укажемъ здѣсь только на слѣдующія важнѣйшія его изобрѣтенія: полиспасты, безконечный винтъ, Архимедовъ винтъ, система зажигательныхъ стеколъ, водяной органъ, *геометрическую игру*, состоящую въ томъ, что квадратъ разрѣзался на 14 частей, представляющихъ разнообразные многоугольники, и изъ нихъ складывались всевозможныя фигуры*).

«Архимедъ обладалъ такимъ проницательнымъ умомъ, творчество его было такъ велико, познанія въ теоріи столь обширны, что онъ даже не хотѣлъ писать о своихъ механическихъ изобрѣтеніяхъ, которыя доставили ему тактую великую славу и благо-

---

*) См. статью «Складываніе и переложеніе фигуръ».

даря которымъ ему приписывали не человѣческія познанія и божественный умъ». (Плутархъ).

Когда Архимедъ кончалъ свою научно-творческую дѣятельность, появился не менѣе знаменитый геометръ, прославившійся своими многочисленными открытіями—*Аполлоній Пергскій*, прозванный древними *великимъ геометромъ*. Жизнь Аполлонія мало извѣстна. Онъ родился около 240 г. до Р. Хр. и написалъ не дошедшее до насъ сочиненіе: «О касаніяхъ». Это сочиненіе содержало рѣшеніе знаменитой такъ наз. «аполлоніевой задачи»: *найти окружность, касательную къ тремъ даннымъ окружностямъ*. Эта задача впослѣдствіи послужила основаніемъ для усовершенствованія геометрическихъ методовъ. (Кэджори). Самое замѣчательное изъ сочиненій Аполлонія—это его «Коническія сѣченія», являющіяся вѣнцомъ всей греческой геометріи. Въ этомъ сочиненіи (въ 8 томахъ), Аполлоній объединяетъ работы своихъ предшественниковъ, излагаетъ собственныя изслѣдованія, стремится связать между собою всѣ сѣченія конуса; тремъ различнымъ родамъ такихъ сѣченій онъ даетъ имена: *эллипсъ, парабола и гипербола*.

Глубиной мысли и единствомъ взгляда Аполлоній впослѣдствіи возбуждалъ восхищеніе геометровъ эпохи Возрожденія, когда были впервые переведены его труды.

Аполлоній написалъ еще: «О сравненіи икосаэдра и додекаэдра, вписанныхъ въ одинъ и тотъ же шаръ».

Архимедъ, занимаясь вычисленіемъ площадей плоскихъ фигуръ, ограниченныхъ криволинейными контурами, далъ толчекъ *геометріи* метрической, *измѣрительной*, Аполлоній же, строя теорію коническихъ сѣченій и вводя въ разсмотрѣніе отношеніе длинъ, далъ толчекъ развитію *геометріи формъ и положенія*.

Значеніе Архимеда и Аполлонія въ исторіи развитія геометріи лучше всего характеризуется словами Лейбница: «Читая внимательно сочиненія Архимеда и Аполлонія, перестаешь удивляться всѣмъ новѣйшимъ открытіямъ геометровъ».

Въ эпоху Эвклида, Архимеда и Аполлонія греческая геометрія достигла высшей точки своего развитія. Все, послѣдовавшее за «золотымъ вѣкомъ», не блещетъ уже той яркостью, талантомъ

и геніальностью. Ученые обращаются больше къ прикладной математикѣ, въ особенности къ астрономіи. Ближайшимъ крупнымъ математикомъ, около 160—125 г. до Р. Хр. является *Гиппархъ*, самый великій астрономъ древняго міра, положившій начало математической астрономіи. Кромѣ сочиненій по астрономіи, онъ написалъ еще сочиненіе по геометріи: «О хордахъ окружности».

Гиппархомъ также были положены начала тригонометріи и изложены геометрическія основы этой науки. Кромѣ Гиппарха въ этотъ періодъ заслуживаетъ вниманія *Никомедъ*, который, по словамъ Прокла, изобрѣлъ *конхоиду* и при помощи этой кривой рѣшилъ задачи объ удвоеніи куба и трисекціи угла. Слѣдуетъ еще упомянуть о *Діоклесѣ*, который изобрѣлъ кривую, извѣстную подъ именемъ *циссоиды*. Діоклесу же мы обязаны рѣшеніемъ задачи: *провести плоскость, дѣлящую шаръ въ данномъ отношеніи*. Эта задача поставлена была еще Архимедомъ, но онъ ее не рѣшилъ, такъ какъ пытался рѣшить только при помощи циркуля и линейки.

Совершенно особнякомъ стоитъ математическій писатель этого періода *Геронъ Александрійскій*, называемый еще Герономъ Старшимъ. Характеръ его геометріи, изложенной въ сочиненіи подъ названіемъ Dioptra, не греческій, а египетскій. Сочиненіе Герона—драгоцѣнный памятникъ греческой геометріи. Древніе всегда отличали практическую геометрію отъ геометріи въ собственномъ смыслѣ.

Въ Dioptra помощью инструмента, называемаго *діоптромъ*, рѣшается графически на поверхности земли множество вопросовъ практической геометріи.

У Герона впервые встрѣчается формула для вычисленія площади треугольника по тремъ его сторонамъ. Сочиненія Герона, удовлетворяя практическимъ потребностямъ своего времени, получили широкое распространеніе. Мы находимъ слѣды ихъ въ Римѣ, встрѣчаемъ ихъ и на Западѣ въ средніе вѣка; они проникли даже въ Индію.

Послѣ паденія династіи Птоломеевъ, царствовавшей слишкомъ триста лѣтъ, Египетъ былъ обращенъ въ римскую провинцію; мѣсто отжившаго свой вѣкъ язычества заняло христіанство;

эти великія событія, имѣвшія большое вліяніе на судьбу народовъ, отразились и на научномъ развитіи александрійской школы.

Старыя ученія Пиѳагора и Платона были замѣнены новыми, создавшими новое направленіе—*вторую александрійскую* школу. Съ этого времени мы встрѣчаемъ уже не оригинальныхъ писателей, а только извѣстныхъ ученыхъ-комментаторовъ, вышедшихъ изъ первой александрійской школы. Великія открытія въ математическихъ наукахъ, доставшіяся на долю древнему міру, такимъ образомъ были закончены. Представители второй александрійской школы уже не обладали духомъ творчества своихъ предшественниковъ, а были только собирателями и толкователями своихъ великихъ учителей.

Упадку развитія математики и наукъ вообще много способствовало истребленіе знаменитой Александрійской библіотеки императоромъ Ѳеодосіемъ, издавшимъ въ 392 году указъ объ уничтоженіи языческихъ храмовъ во всемъ государствѣ. Жертвой этого распоряженія сдѣлался и храмъ Сераписа, въ которомъ помѣщалась громадная библіотека, основанная Птоломеями и обогащенная пожертвованіями римскихъ императоровъ; она находилась въ храмѣ Сераписа еще со времени осады Александріи Юліемъ Цезаремъ.

Представителями второй александрійской школы были Менелай, Птоломей, Діофантъ, Паппъ и др.

Менелай, жившій около 90 г. по Р. Хр., былъ астрономъ и геометръ. Изъ сочиненій Менелая до насъ дошло только одно: «Сферика». Менелай даетъ теоремы о сферическихъ треугольникахъ, слѣдуя приблизительно по тому же пути, по которому шелъ Эвклидъ при изслѣдованіи плоскихъ треугольниковъ. Особенной извѣстностью пользуются его двѣ теоремы, такъ наз. «леммы Менелая», которыя впослѣдствіи были положены въ основаніе теоріи сѣкущихъ Карно. Другой представитель второй Александрійской школы, ***Клавдій Птоломей***, писалъ по астрономіи и геометріи; познанія его были громадны. Біографія въ точности неизвѣстна; его ученую дѣятельность относятъ къ 125—160 г. по Р. Хр. Въ своемъ сочиненіи, извѣстномъ подъ именемъ ***«Альмагестъ»*** (очень большой), онъ излагаетъ основы своей «геоцентриче-

ской системы міра», господствовавшей до Коперника и Кеплера. Въ «Альмагестѣ», среди нѣсколькихъ интересныхъ геометрическихъ выводовъ, находится изложеніе всѣмъ извѣстной «Птоломеевой теоремы». Въ этой же книгѣ приведена таблица хордъ, дающая возможность находить по хордамъ двухъ дугъ хорды суммы и разности этихъ же дугъ. Птоломей дѣлитъ окружность на 360 градусовъ, діаметръ на 120 частей, каждое такое дѣленіе на 60 частей, которыя снова дѣлятся на 60 частей. Части эти назывались *partes minutae primae* и *partes minutae secundae*, откуда и пошли названія: «минута» и «секунда». Птоломей одинъ изъ первыхъ положилъ въ геометріи основаніе *методу проекцій*, который былъ ему необходимъ для устройства географическихъ картъ.

150 лѣтъ спустя послѣ Птоломея жилъ Паппъ, выдающійся геометръ, авторъ драгоцѣннаго памятника для исторіи математическихъ наукъ — «Математическихъ коллекцій». Паппъ собралъ въ немъ въ одно цѣлое разбросанныя открытія замѣчательнѣйшихъ математиковъ; въ этихъ «коллекціяхъ» онъ приводитъ наиболѣе любопытныя изъ своихъ предложеній, указываетъ на ихъ значеніе, вникаетъ въ сущность каждаго сочиненія его предшественниковъ и приводитъ даже ихъ содержаніе.

Ему принадлежитъ открытіе свойствъ *директриссы* коническихъ сѣченій. Паппъ далъ рѣшеніе задачи: *въ данную окружность вписать треугольникъ такъ, чтобы его стороны проходили черезъ 3 данныя точки*. Эта задача можетъ служить примѣромъ силы его геометрическихъ талантовъ. Лишь въ XVIII столѣтіи задача эта была обобщена Крамеромъ (три точки произвольно расположены), а еще позже Понселе. Ему принадлежатъ также теоремы объ объемахъ и поверхностяхъ тѣлъ вращенія, извѣстныя въ настоящее время подъ названіемъ теоремъ Гюльдена.

Распаденіе Западной Римской имперіи нанесло окончательный ударъ второй александрійской школѣ—она перестала существовать. Научная дѣятельность была перенесена въ Аѳины —первоначальный центръ эллинской культуры. Образовавшаяся *аѳинская* школа существовала весьма недолго, а именно до конца

VI в. Ученые этой школы, наиболѣе замѣчательными представителями которой были Проклъ и Евтокій, занимались изученіемъ и толкованіемъ древнихъ греческихъ писателей.

Проклъ Діадохъ (наслѣдникъ) своими работами еще нѣкоторое время поддерживалъ угасавшее развитіе наукъ; онъ, напр., комментировалъ сочиненія Платона. Самое замѣчательное его сочиненіе — комментаріи на первую книгу «Началъ» Эвклида. Комментаріи эти отличаются своей полнотой и цѣнны съ исторической точки зрѣнія.

Евтокій написалъ комментаріи къ книгамъ Архимеда «объ измѣреніи круга, о шарѣ и цилиндрѣ, а также къ «коническимъ сѣченіямъ» Аполлонія.

Въ VIII вѣкѣ, послѣ паденія аѳинской школы, въ Византіи образовалась новая школа—*византійская*—существовавшая до XV столѣтія, когда Константинополь былъ взятъ турками. Византійская школа, какъ и предшествовавшая ей аѳинская, не дала ни одного сколько-нибудь замѣчательнаго математика. Ученые византійской школы были погружены въ богословскіе и грамматическіе споры; изученію точныхъ наукъ они не придавали никакого значенія. Въ византійской школѣ болѣе извѣстенъ Геронъ Младшій, написавшій сочиненіе подъ названіемъ: «Геодезія». Цѣлью его книги было представить въ болѣе сокращенной формѣ открытія древнихъ ученыхъ и сдѣлать ихъ болѣе доступными въ эпоху невѣжества. Въ предисловіи къ книгѣ Геронъ упрекаетъ современныхъ ему ученыхъ въ томъ, что они обращаютъ вниманіе на красоту слога болѣе, чѣмъ на содержаніе и идею сочиненій. Геронъ упрекаетъ византійскихъ писателей, которые напрасно теряютъ труды и время на составленіе пустѣйшихъ сочиненій и, въ противоположность ихъ болтливости, приводитъ индусскихъ мудрецовъ, отличающихся краткостью и простотой изложенія.

«Геодезія» Герона посвящена измѣренію плоскихъ и круглыхъ поверхностей, измѣренію объемовъ и задачамъ на дѣленіе поверхностей и объемовъ. Доказательства, въ противоположность великимъ ученымъ первой александрійской школы, построены кратко и просто.

Римляне. Первые вѣка владычества римлянъ, протекшie въ безпрерывныхъ войнахъ, прошли совершенно безцвѣтно въ смыслѣ развитія математическихъ наукъ, которыя были въ крайнемъ пренебреженіи у римскаго народа; римляне посвящали себя больше всего военному искусству и краснорѣчію. Цицеронъ говоритъ, что его соотечественники мало занимались геометріей. Вся римская геометрія, носившая *практическій*, прикладной характеръ, напоминала египетскую и имѣла свое начало въ Римѣ въ эпоху Юлія Цезаря, который приказалъ произвести генеральное размежеваніе государства для введенія правильной системы взиманія податей. Самыя древнія сочиненія римлянъ по геометріи—это сочиненія римскихъ землемѣровъ, носившихъ названіе gromatici. Существовавшій у римлянъ обычай разбивать землю на участки, прямоугольной и квадратной формы, упрощалъ дѣло и значительно уменьшалъ размѣры необходимыхъ геометрическихъ свѣдѣній. Оттого въ сочиненіяхъ римскихъ громатиковъ опредѣленія и сравнительныя геометрическія понятія совершенно отсутствуютъ, правила формулированы безъ всякихъ доказательствъ, примѣры рѣшены безъ всякой точности и большей частью неясно.

Въ началѣ среднихъ вѣковъ латинскій Западъ все болѣе и болѣе погружался съ густой мракъ самаго грубаго и глубокаго невѣжества. Лишь въ Бенедиктинскихъ монастыряхъ теплился интересъ къ знанію и не совсѣмъ еще угасла наука, хотя и тамъ ею интересовались по стольку, по скольку это было нужно для опредѣленія дня Пасхи. Всѣ усилія тогдашнихъ ученыхъ, если ихъ можно такъ назвать, были обращены къ составленію сочиненій религіозно-схоластическаго характера.

Во второй половинѣ VIII вѣка императоръ Карлъ Великій задумалъ поднять упавшую науку, приказавъ открывать школы при церквахъ и монастыряхъ. Но особенно двинулъ впередъ интересъ къ заснувшему было знанію скончавшійся въ 1003 году французъ Гербертъ, взошедшій на папскій престолъ подъ именемъ Сильвестра II. Это была высокодаровитая, выдающаяся личность своего времени. Въ области геометріи ему принадлежитъ руководство, въ которомъ, между прочимъ, говорится, какъ измѣрять высоту недоступнаго предмета; въ этомъ руковод-

ствѣ рѣшается также трудная для того времени задача о нахожденіи катетовъ прямоугольнаго треугольника по гипотенузѣ и площади. Къ концу XI и началу XII вѣка на Западѣ начинаетъ воскресать интересъ къ наукамъ въ монастырскихъ школахъ. Съ разрѣшенія духовныхъ властей частные учителя селились возлѣ школъ и читали въ нихъ лекціи по теологіи, логикѣ и праву. Возлѣ такихъ центровъ росло число студентовъ и образовывались общества учителей и ихъ слушателей. Возникшіе такимъ путемъ *университеты*, сперва ютившіеся у монастырскихъ стѣнъ, постепенно завоевывали себѣ самостоятельность и добивались со стороны государства нѣкоторыхъ привилегій, напр., права присуждать ученыя степени, дававшія возможность повсемѣстнаго, свободнаго преподаванія въ королевствѣ и т. п. На судьбу и дальнѣйшее развитіе наукъ въ университетахъ громадное вліяніе оказали арабы, сохранившіе для европейскихъ народовъ творенія великихъ философовъ древняго міра. При посредствѣ сарацинъ, благодаря испанскимъ маврамъ и евреямъ, сокровища науки древнихъ грековъ не пропали безслѣдно.

Но прежде чѣмъ остановиться на той роли, какую сыграла арабская наука въ исторіи геометріи, необходимо ознакомиться съ состояніемъ геометріи у древнихъ индусовъ, которые, благодаря торговымъ сношеніямъ арабовъ съ Индіей, хотя и въ меньшей степени, чѣмъ греки, имѣли неспосредственное вліяніе на арабскую культуру.

Индусы. Въ то время, какъ творческій духъ грековъ началъ терять въ глубинѣ и блескѣ, на противоположной части земного шара, въ Индостанѣ, другая арійская раса — индусы — стала обнаруживать блестящія математическія способности. Но не въ области геометріи прославились они, а въ области ариѳметики и алгебры. Въ геометріи они были даже слабѣе, чѣмъ греки въ алгебрѣ.

Національной чертой индусскаго генія, создавшаго даже свою религію, была склонность къ философскому созерцанію и къ умозрѣніямъ, стремившимся проникнуть въ сущность вещей. Стремясь къ познанію внутреннихъ отношеній между явленіями, индусскіе философы мало интересовались внѣшними формами. Поэтому индусы рѣзко отличались отъ грековъ,

для которыхъ много значила форма. Геометрія, гдѣ такъ много дѣла съ формой, не привлекала индусскимъ мудрецовъ. Другое дѣло—наука о числахъ. Много привлекательнаго было для мистически настроеннаго ума индусовъ въ изученіи взаимныхъ отношеній между числами, приводящими иногда къ столь неожиданнымъ результатамъ. Геометрія индусовъ, составлявшая лишь часть ариѳметики, не походила на строгую, научную систему греческихъ геометровъ. Объ аксіомахъ и доказательствѣ теоремъ у нихъ нѣтъ и помину, такъ какъ индусскіе математики искали только числовыя соотношенія между различными частями данной фигуры, нисколько не заботясь и не обращая вниманія на ея свойства. Основное начало, которымъ индусы руководствовались при выводѣ геометрическихъ истинъ—это принципъ *наглядности*. О справедливости предложеній они заключали прямо изъ чертежа, расположеннаго такъ, что предложеніе дѣлалось какъ бы очевиднымъ, какъ логическое слѣдствіе построеній. Вмѣсто всякихъ разсужденій, рядомъ съ чертежомъ, они писали одно слово: *смотри*.

Непріятной чертой индусскихъ математиковъ является то, что сочиненія ихъ написаны въ стихотворной формѣ и выражены мистическимъ языкомъ.

Самое древнее изъ извѣстныхъ сочиненій на санскритскомъ языкѣ называется «Сальвасутры», что значитъ «правила веревки»; оно представляетъ собой произведеніе геометрически-теологическаго характера, въ которомъ даны правила, какъ строить жертвенники. Для проведенія при постройкахъ взаимно-перпендикулярныхъ линій примѣнялись треугольники со сторонами 3, 4, 5 и 5, 12, 13.

Древнѣйшій изъ извѣстныхъ намъ индусскихъ астрономовъ Арьябхатта, родившійся въ 476 г. по Р. Хр., посвятилъ математикѣ третью главу своего знаменитаго сочиненія, подъ названіемъ «Арьябхаттіанъ». Глава эта называется: «Начала счисленія» и въ ней содержится, кромѣ ариѳметическихъ правилъ, нѣсколько геометрическихъ предложеній.

Послѣ Арьябхатты жилъ Брахмагупта, родившійся въ 598-мъ году по Р. Хр.; онъ написалъ сочиненіе «Брахмаспхута-сиддаханта, т.-е. «Улучшенная система Брахмы». Вся геометрическая

часть сочиненія Брахмагупты занята главнымъ образомъ нахожденіемъ въ раціональныхъ числахъ радіуса окружности и площадей вписанныхъ въ нее треугольника и четыреугольника, въ функціи ихъ сторонъ.

Въ теченіе 500 лѣтъ, послѣдовавшихъ послѣ Брахмагупты, до появленія трактата Бхаскары «Сиддхантасиромани» *) — геометрія индусовъ сдѣлала мало успѣховъ.

Бхаскара, по прозвищу Ачьяра или Мудрецъ, родился въ 1114-мъ году. Въ двухъ математическихъ главахъ своего сочиненія, названныхъ «Лилавати»—«Прекрасная», т.-е. «благородная наука», Бхаскара обращаетъ особенное вниманіе на точность выраженій и представленій и обнаруживаетъ иногда даже попытки приводить нѣчто въ родѣ доказательствъ. Бхаскара находитъ площадь треугольника, какъ половину произведенія основанія на высоту и для доказательства строитъ на основаніи треугольника прямоугольникъ, высота котораго равна половинѣ высоты треугольника.

Бхаскара указываетъ, что для опредѣленія четыреугольника недостаточно четырехъ сторонъ, но необходима еще и діагональ; занимается также нахожденіемъ длины окружности и площади круга, опредѣляетъ поверхность и объемъ шара и принимаетъ $\pi = \frac{22}{7}$. Послѣ Бхаскары великія имена перестаютъ появляться въ исторіи индусской геометріи, встрѣчаются лишь комментаторы, которые пишутъ примѣчанія къ сочиненіямъ Бхаскары, не всегда даже хорошо понимая ихъ.

Арабы. Когда искусства и науки клонились уже къ упадку, когда пожаръ великолѣпной библіотеки Птоломеевъ, драгоцѣнной сокровищницы всѣхъ произведеній генія и образованности десяти столѣтій, пслужилъ сигналомъ къ варварству и долгой тьмѣ, сбъявшей умъ человѣческій, въ это время Египетъ сдѣлался добычей арабовъ, которые принялись за возстановленіе наукъ. Наклонность и ревностная любовь арабовъ къ наукамъ развилась быстро въ VIII вѣкѣ, когда началось царствованіе Абассидовъ. Эти государи, благородные подражатели египет-

*) См. II томъ Физ.-Мат. Хрестоматіи.

скихъ Птоломеевъ, сосредоточили въ своей столицѣ таланты всего міра. Они дѣятельно собирали всѣ знанія, которыя могли найти у народовъ, покоренныхъ преемниками Пророка. Арабы сдѣлались владѣтелями и единственными хранителями всѣхъ сокровищъ науки, при чемъ греки и индусы являлись главными вкладчиками въ этотъ научный капиталъ.

Въ рукахъ арабовъ геометрія, за исключеніемъ вычисленія сферическихъ треугольниковъ, осталась на прежней степени развитія. Въ своихъ собственныхъ трудахъ по геометріи арабы ограничивались тѣмъ, что удивлялись греческимъ сочиненіямъ и комментировали ихъ, какъ бы видя въ нихъ крайній предѣлъ науки. Элементы Эвклида были первымъ сочиненіемъ, которое перевели арабы (въ VIII вѣкѣ, въ царствованіе Альманзора). Благодаря просвѣщенному поощренію калифа Аль-Мамуна, который началъ царствовать въ Багдадѣ въ 814-мъ году, вскорѣ сдѣлались извѣстными сочиненія Архимеда, Аполлонія, Менелая и «Альмагестъ» Птоломея. Три брата Магометъ, Гамедъ и Газенъ, сыновья Музы-бенъ-Шакера, прославились переводами многихъ греческихъ и индусскихъ сочиненій и своими собственными трудами по всѣмъ областямъ математики.

Въ самомъ древнемъ памятникѣ арабской геометріи, написанномъ Магометомъ-бенъ-Муза-Альхуаризми, подъ названіемъ «Алгебра» *) находимъ предложеніе о квадратѣ гипотенузы, (названное *фигурой невѣсты*) для простѣйшаго случая, когда прямоугольный треугольникъ равнобедренный. Въ этомъ сочиненіи заключается также вычисленіе высоты и площади треугольника въ функціи его сторонъ, опредѣляется площадь параллелограмма, поверхность пирамиды и объемъ усѣченной четыреугольной пирамиды.

Тебетъ-бенъ-Коррахъ (836—901), ученикъ Магомета-бенъ-Музы, былъ знаменитый геометръ, владѣвшій геометріей во всемъ ея объемѣ. Сочиненіе Тебета-бенъ-Корраха вызывало любопытство современныхъ геометровъ, такъ какъ онъ въ немъ показываетъ, какъ прилагать *алгебру къ геометріи.*

---

*) См. стр. 14 алгебраической хрестоматіи.

Магомету изъ Багдада, геометру X столѣтія, приписываютъ изящное изслѣдованіе о раздѣленіи фигуръ и поверхностей на части, пропорціональныя даннымъ числамъ, посредствомъ прямыхъ, проведенныхъ подъ извѣстнымъ условіемъ. Ему впослѣдствіи подражали всѣ новые геометры въ сочиненіяхъ по геодезіи.

Важнѣйшей заслугой арабовъ въ геометріи является *приложеніе алгебры къ геометріи;* вслѣдствіе этого геометрія получила необыкновенную общность, изъ науки конкретной она сдѣлалась наукой отвлеченной, глазъ пересталъ участвовать въ геометрическихъ изслѣдованіяхъ, чертежъ пересталъ имѣть значеніе, и всѣ теоремы стали выражаться значительно проще.

Изслѣдуя геометрію и алгебру индусовъ, одну при помощи другой, благодаря взаимной поддержкѣ, оказываемой другъ другу этими науками, арабы сообщили математикѣ тотъ особый и оригинальный характеръ, который перешелъ къ европейцамъ, и въ ихъ рукахъ послужилъ въ XVI столѣтіи основой для быстроразвившагося превосходства новой науки передъ древней. Каждую геометрическую теорему или задачу старались выразить съ помощью алгебраическихъ комбинацій, и обратно, въ каждой алгебраической формулѣ старались, если возможно, найти геометрическій смыслъ. Отсюда вытекла *аналитическая геометрія* и построеніе алгебраическихъ выраженій, а также *воображаемая геометрія,* какъ относительно пространства трехъ измѣреній, такъ и относительно отвлеченныхъ *пространствъ измѣреній выше третьяго.*

По мѣрѣ того, какъ алгебра все болѣе и болѣе обнимала геометрію, падалъ глубокій синтезъ древнихъ геометровъ, и самыя глубокія изслѣдованія стали производиться механически, а усиленная дѣятельность ума, съ помощью которой древніе открывали самыя запутанныя связи между геометрическими величинами, начала значительно ослабѣвать.

Въ то время, какъ арабы проходили быстрый и блестящій путь въ дѣлѣ науки, европейцы еще были погружены въ полное невѣжество. Лишь, начиная съ XII столѣтія выказываются первыя умственныя стремленія въ Европѣ и дѣлаются многочисленныя попытки перенести сюда древнюю науку, сохраненную и

пополненную арабами. Движенiе это повторяется съ новой силой въ срединѣ XV столѣтiя; съ этого времени, подъ руководствомъ знанiя, почерпнутаго изъ греческихъ рукописей, подготовляются великiя открытiя XVI вѣка, которыя служатъ началомъ неизмѣримаго превосходства новыхъ народовъ передъ древними въ области математики.

Тринадцатый вѣкъ представляетъ новую эру въ исторiи науки. Въ этомъ вѣкѣ распространяется арабская система счисленiя, алгебра и многiя важныя сочиненiя греческой школы; этимъ подготовляется эпоха Возрожденiя.

Эта эпоха богата великими умами. Мы здѣсь встрѣчаемъ имена Iордана, Леонардо Фибоначчи изъ Пизы, Кампана изъ Новары, Рожера Бэкона и др.

Iорданъ изъ Саксонiи, генералъ доминиканскаго ордена, написалъ нѣсколько работъ по геометрiи, алгебрѣ и механикѣ.

Леонардо Фибоначчи изъ Пизы первый познакомилъ европейскихъ ученыхъ съ алгеброй и съ арабской системой счисленiя. Въ 1220 году Фибоначчи издалъ «Practica geometriae», въ которомъ онъ съ геометрической строгостью и ясностью передаетъ все, что имѣется у Эвклида и Архимеда объ измѣренiи площадей прямолинейныхъ и криволинейныхъ фигуръ, о кругѣ и шарѣ и объ измѣренiи объемовъ; онъ даетъ изящное доказательство теоремы о томъ, что медiаны треугольника пересѣкаются въ одной точкѣ, теоремы, извѣстной еще Архимеду, но не доказанной имъ. Фибоначчи доказалъ также, что квадратъ дiагонали прямоугольнаго параллепипеда равенъ суммѣ квадратовъ трехъ его измѣренiй. Въ своихъ доказательствахъ Леонардо пользовался и алгеброй.

Жившiй въ концѣ XIII столѣтiя *Компанъ Новарскiй*, перевелъ съ арабскаго 13 книгъ Эвклида и снабдилъ ихъ комментарiями. Благодаря этому труду геометрiя распространилась въ Европѣ. Далѣе слѣдуетъ *Рожеръ Бэконъ*, одинъ изъ генiальнѣйшихъ людей среднихъ вѣковъ; онъ занимаетъ первое мѣсто въ ряду лицъ, способствовавшихъ возрожденiю наукъ. Бэконъ содѣйствовалъ въ особенности успѣхамъ математики, указывая въ многочисленныхъ своихъ сочиненiяхъ то важное мѣсто, кото-

рое математика занимаетъ въ ряду другихъ отраслей знанія, и ту пользу, которую она можетъ оказать во всѣхъ основанныхъ на ней научныхъ изслѣдованіяхъ. Бэконъ утверждалъ, что «лишь божественная математика, являющаяся азбукой философіи, способна очищать мысли и подготовить человѣка къ усвоенію всякихъ знаній».

Четырнадцатое столѣтіе является въ исторіи среднихъ вѣковъ менѣе блестящимъ, чѣмъ XIII-ое. Причина этого заключается въ томъ, что новыя и важныя произведенія, прославившія имена Фибоначчи, Іордана, Компана, Бэкона и др., должны были обдумываться и изучаться въ тишинѣ, чтобы быть вполнѣ усвоенными и принести пользу. Математическія науки расширились и не сводились уже на простое воспроизведеніе или подражаніе немногимъ арабскимъ сочиненіямъ; дѣлались первыя попытки примѣнить пріобрѣтенныя знанія и итти далѣе; умы подготовлялись къ быстрой и общей эволюціи, которая повела бы за собою въ слѣдующемъ столѣтіи обновленіе наукъ.

Первая треть XIV столѣтія дала наукѣ человѣка, который пріобрѣлъ громкую извѣстность своими познаніями въ философіи, математикѣ, теологіи и въ арабской литературѣ, именно ***Томаса Брадвардина***, епископа Кентерберійскаго. Его сочиненіе подъ заглавіемъ «Geometria speculativa» дѣлаетъ честь XIV вѣку. Въ немъ излагается теорія звѣздчатаго пятиугольника, той самой пятиугольной звѣзды, которая служила гербомъ пиѳагорейцевъ и которой приписывались различныя мистическія свойства и придавалось сверхъестественное значеніе. Даже въ XVI столѣтіи знаменитый химикъ Парацельсъ считалъ правильный звѣздчатый пятиугольникъ символомъ здоровья. Брадвардинъ первый далъ теорію звѣздчатыхъ многоугольниковъ, способы ихъ построенія, нахожденія суммы ихъ угловъ, а также изложилъ геометрическія свойства изопериметрическихъ фигуръ.

Въ четырнадцатомъ столѣтіи прославился нормандскій епископъ Nicole Oresme, изложившій принципъ открытаго впослѣдствіи Декартомъ способа графическаго изображенія соотношеній между двумя перемѣнными величинами при помощи метода координатъ. Кромѣ того слѣдуетъ упомянуть кардинала Николая Куза, противника схоластической философіи, извѣстнаго своими многочисленными попытками найти квадратуру круга.

Наступаетъ XV вѣкъ —начало эпохи возрожденія наукъ въ Западной Европѣ. Славѣ этого вѣка содѣйствовало изобрѣтеніе книгопечатанія, этого могущественнаго рычага для умственнаго развитія народовъ, и завоеваніе Константинополя, благодаря которому Европа пріобрѣла искусства, литературу, философію и науки древней Греціи.

XV столѣтіе дало двухъ знаменитыхъ живописцевъ *Альбрехта Дюрера* и *Леонардо-да-Винчи*, которые должны быть отнесены къ числу ученѣйшихъ геометровъ своего времени.

Первый изъ нихъ—Дюреръ (1471—1528) написалъ сочиненіе по геометріи для архитекторовъ и живописцевъ. Онъ указываетъ способы черченія различныхъ кривыхъ линій. У него мы находимъ спиральныя линіи—плоскія, цилиндрическія, сферическія и коническія, черченіе эллипса, вписываніе въ окружность различныхъ многоугольниковъ, а также попытки найти квадратуру круга.

Леонардо-да-Винчи (1452—1519), одинъ изъ величайшихъ художниковъ Италіи, принадлежитъ къ числу тѣхъ рѣдкихъ геніевъ, которые съ одинаковой легкостью работали во всѣхъ областяхъ человѣческаго знанія. Въ исторіи каждой изъ этихъ областей имя его находитъ себѣ мѣсто. Онъ въ особенности занимался математикой и науками, къ ней соприкасающимися—физикой, раціональной и практической механикой, музыкой и т. д. Построеніе правильныхъ вписанныхъ многоугольниковъ обратило на себя особое вниманіе Леонардо-да-Винчи. Приближенное построеніе правильнаго семиугольника по его способу, между прочимъ, считалось вполнѣ точнымъ. Замѣчательно и его рѣшеніе квадратуры круга безъ помощи циркуля и линейки. (Слѣдъ отъ каченія по плоскости цилиндра съ высотой, равной половинѣ его радіуса, при одномъ оборотѣ, даетъ прямоугольникъ, равновеликій площади круга основанія). Леонардо-да-Винчи, Дюреръ и итальянскій математикъ Тарталіа, умершій въ 1557 году, широко развили методы древнихъ *геометрическихъ построеній*, введя еще одно ограниченіе, а именно пользованіе при построеніяхъ только однимъ циркулемъ, хотя общую теорію этихъ построеній далъ уже значительно позже ихъ соотечественникъ Маскерони. Въ XVI в., въ

области геометріи прославились *Кеплеръ*, знаменитый французскій алгебраистъ *Віета* и *Гюльденъ*.

Кеплеръ (1571 — 1630) въ своемъ безсмертномъ твореніи «Harmonices Mundi» (1619 г.) далеко подвинулъ впередъ теорію звѣздчатыхъ многогранниковъ, бывшихъ любимымъ предметомъ его изученія. Еще въ древности, благодаря идеямъ пиѳагорейцевъ, пять правильныхъ тѣлъ («космическія фигуры»), играли настолько большую роль, что ихъ разсматривали, какъ конечную цѣль, къ которой стремятся научные труды геометровъ. Кеплеръ подчеркивалъ идею *непрерывности* въ геометріи, разсматривалъ параболу, какъ предѣльный случай эллипса или гиперболы, и принималъ параллельныя линіи *сходящимися* въ безконечности.

Франсуа Віета (1540—1603), создавшій современную буквенную алгебру, примѣнилъ методы ея и къ геометріи. Віета, введя алгебру въ ученіе о протяженіи, показалъ графическое рѣшеніе уравненій 2-й и 3-й степени, ознакомивъ геометровъ съ искусствомъ геометрическаго построенія алгебраическихъ формулъ. Это былъ первый шагъ къ ближайшему соединенію алгебры съ геометріей,—шагъ, который впослѣдствіи привелъ Декарта къ блистательнымъ открытіямъ и сдѣлался ключомъ всей математики. Въ сочиненіяхъ Віеты мы находимъ также первую мысль о выраженіи площади кривой посредствомъ безконечнаго ряда.

Третьимъ представителемъ XVI вѣка, какъ было уже сказано, является Гюльденъ (1577—1643). Его знаменитое правило, извѣстное еще во времена Паппа, оставалось до Гюльдена незамѣченнымъ; онъ же открылъ его самъ и употреблялъ для рѣшенія вопросовъ, не поддававшихся другимъ средствамъ.

Въ XVII столѣтіи выдѣляются имѣна *Декарта*, *Фермата* и *Робервала* (1602—1675). Эти ученые открываютъ совершенно новые пути въ математикѣ. Эти ученые раздѣляютъ между собою славу рѣшенія (каждый своимъ особымъ путемъ), задачи, которую еще ни одинъ геометръ не рѣшался до тѣхъ поръ обнять во всей ея полнотѣ, а именно общей задачи о проведеніи *касательныхъ къ кривымъ линіямъ;* эта задача впослѣдствіи привела къ открытію дифференціальнаго исчисленія.

Фермату, занимавшемуся съ особой любовью преимущественно числовыми изысканіями, геометрія также обязана важными открытіями. По образцу Архимеда, нашедшаго квадратуру параболы, Ферматъ опредѣлилъ площади параболъ всѣхъ порядковъ. Способъ Фермата для проведенія касательныхъ основанъ на введеніи въ вычисленія понятія о безконечно-малыхъ величинахъ.

Ферматъ обобщилъ задачу Аполлонія о касаніи окружностей (даны три окружности, провести четвертую, касающуюся трехъ данныхъ) и вполнѣ разрѣшилъ аналогичную задачу о касаніи шаровъ (даны четыре шара, положеніе и величина которыхъ извѣстны; найти шаръ, касающійся четырехъ данныхъ). Вопросъ этотъ, испытавшій на себѣ всю глубину соображенія Аполлонія, былъ предложенъ Фермату Декартомъ, который въ своихъ письмахъ говоритъ, что рѣшилъ задачу при посредствѣ циркуля и линейки; рѣшеніе это не дошло до насъ.

Въ 1637 году Декартъ (1596—1650) далъ ученому міру аналитическую геометрію, создавъ ею новую эру въ исторіи геометріи. Перенеся изученіе свойствъ геометрическихъ образовъ изъ области чистой геометріи въ область формальной алгебры, Декартъ оказалъ наукѣ услугу первостепенной важности. Съ тѣхъ поръ началось быстрое развитіе геометріи и успѣхи ея распространились на другія науки, находящіяся съ нею въ прикосновеніи. Декартъ, этотъ глубокій философъ, благодаря неоцѣнимой геніальности своей мысли, приложилъ алгебру къ теоріи кривыхъ линій, создавъ орудіе для преодолѣнія препятствій, останавливавшихъ до тѣхъ поръ величайшихъ геометровъ, и существенно измѣнивъ видъ математической науки. Способы, созданные Робервалемъ и Ферматомъ также носили характеръ отвлеченности и всеобщности, но они не дали средствъ для обширнаго ихъ приложенія и примѣненія въ математическихъ изслѣдованіяхъ. Эти средства дала идея Декарта, явившаяся необходимымъ введеніемъ къ новымъ исчисленіямъ Лейбница и Ньютона.

Геометрія Декарта, кромѣ характера всеобъемлемости, имѣла по сравненію съ геометріей древнихъ еще другое отличіе: она посредствомъ одной формулы давала общія свойства цѣлыхъ

группъ кривыхъ линій, такъ что, когда этимъ путемъ открывалось какое-либо свойство одной кривой, тотчасъ же опредѣлялись такія же или подобныя свойства множества другихъ кривыхъ.

Новый путь, намѣченный геніемъ Декарта и широко охватившій умы математиковъ, послужилъ причиной того, что въ теченіе почти двухъ столѣтій чистая геометрія была оставлена, и обозначившійся параллельно аналитическому методу, другой путь геометріи, синтетическій, съ новымъ принципомъ перспективы и теоріей сѣкущихъ, долженъ былъ на первыхъ порахъ стушеваться, хотя представителями синтетической геометріи были такіе яркіе геніи, какъ Дезаргъ и Паскаль.

Дезаргъ (1593—1663), котораго Паскаль избралъ своимъ учителемъ и который былъ дѣйствительно достоинъ своего ученика, родился въ Ліонѣ, былъ архитекторомъ и инженеромъ. Вскорѣ послѣ осады Ла-Рошеля въ 1628 году Дезаргъ удалился въ Парижъ и посвятилъ себя геометрическимъ изслѣдованіямъ. Дезаргъ при жизни имѣлъ мало друзей, способныхъ оцѣнить его геній, и оттого сочиненія его находились у современниковъ въ пренебреженіи.

Дезаргъ, какъ и Паскаль, но годомъ ранѣе послѣдняго, писалъ совершенно новымъ и оригинальнымъ образомъ о свойствахъ коническихъ сѣченій—этихъ знаменитыхъ кривыхъ, которымъ, 2000 лѣтъ спустя послѣ Аполлонія, пришлось играть такую важную роль въ небесной механикѣ, когда Кеплеръ узналъ въ нихъ истинные пути, описываемые планетами и ихъ спутниками, а Ньютонъ въ ихъ фокусахъ открылъ средоточіе силы, приводящей въ движеніе всѣ тѣла вселенной.

Дезаргъ внесъ два важныхъ нововведенія въ изученіе коническихъ сѣченій. Во-первыхъ, онъ разсматривалъ ихъ на конусѣ при всевозможныхъ положеніяхъ сѣкущей плоскости, не пользуясь, какъ Аполлоній, осевымъ треугольникомъ. Во-вторыхъ, онъ задумалъ примѣнить къ этимъ кривымъ свойства круга, служащаго основаніемъ конуса. Онъ разсматривалъ различныя сѣченія конуса (кругъ, эллипсъ, параболу, гиперболу, систему двухъ прямыхъ), какъ видоизмѣненія одной и той же кривой; до этихъ поръ они разсматривались отдѣльно и изслѣдовались каждое особыми способами.

Дезаргъ широко развилъ кеплеровскій *принципъ непрерывности*, опредѣлилъ касательную, какъ предѣльное положеніе сѣкущей, разсматривалъ прямую линію, какъ окружность круга, центръ котораго находится въ безконечности, считалъ, что оба конца прямой сходятся въ безконечности; изъ принципа непрерывности онъ вывелъ, какъ слѣдствіе, что параллельныя линіи отличаются отъ всякой другой системы прямыхъ только тѣмъ, что точки ихъ пересѣченія находятся въ безконечности.

Дезаргъ далъ также теорію полярныхъ линій и былъ творцомъ проективной геометріи. Онъ изложилъ теорію инволюціи шести точекъ и вывелъ заключеніе, что *инволюція есть зависимость проективная* *).

Геометрическій геній ученика Дезарга—Паскаля обнаружился, когда ему было только двѣнадцать лѣтъ отъ роду.

Въ шестнадцать лѣтъ онъ уже обнародовалъ свой знаменитый трактатъ (всего на шести страницахъ): «Essais pour les coniques», въ которомъ содержалось знаменитое предложеніе о «мистическомъ шестиугольникѣ», извѣстное подъ названіемъ «теоремы Паскаля», (противоположныя стороны шестиугольника, вписаннаго въ коническое сѣченіе, пересѣкаются въ трехъ точкахъ, лежащихъ на одной прямой). Слабое здоровье Паскаля не позволило ему въ зрѣломъ возрастѣ посвятить себя математикѣ.

Паскаль превзошелъ всѣхъ знаменитѣйшихъ геометровъ въ изысканіяхъ свойствъ циклоиды. Эта знаменитая кривая, поводомъ къ открытію которой послужило движеніе колеса по плоскости и исторія которой тѣсно связана со многими великими открытіями XVII вѣка, была уже предметомъ изученія Галилея, Декарта, Фермата, Роберваля и Торичелли. Оставленная на нѣкоторое время, она была снова выведена на сцену Паскалемъ, стремившимся къ тому, чтобы многочисленные трудные вопросы, къ которымъ ведетъ эта кривая, служили испытаніемъ и мѣрой силъ и способностей геометровъ того времени.

Изученіе этой кривой повело къ открытію цѣлаго класса линій, производимыхъ движеніемъ данной кривой по другой неподвижной кривой **). Эти линіи были разсматриваемы во всей

---

*) См. статью о проективной геометріи.

**) См. статью о замѣчательныхъ кривыхъ.

общности Лейбницемъ, Де-Лагиромъ, Николемъ и другими. Германъ и Клеро распространили ту же теорію на кривыя линіи, описываемыя подобнымъ же образомъ на сферѣ.

Труды Паскаля по другому отдѣлу геометріи, относящемуся къ геометрическому анализу древнихъ и къ теоріи коническихъ сѣченій, заслуживаютъ вниманія не менѣе его замѣчательныхъ изслѣдованій циклоиды. Въ нихъ, какъ и въ сочиненіи Дезарга, находимъ зародышъ новѣйшихъ ученій, составляющихъ новую геометрію.

Самое выдающееся изъ открытій Паскаля—это прекрасная теорема о «мистическомъ шестиугольникѣ», которая была положена имъ въ основаніе его знаменитаго трактата «О коническихъ сѣченіяхъ».

Въ XVII вѣкѣ развитію синтетической геометріи способствовалъ итальянскій геометръ Чева, по образованію инженеръ гидравликъ. Въ 1678 году онъ издалъ свое сочиненіе: «De linie rectis», въ которомъ заключается теорема, носящая названіе «теоремы Чевы». Чева въ своихъ доказательствахъ широко пользовался теоремой Гюльдена.

Благодаря всепоглощающему интересу, возбужденному аналитической геометріей Декарта, а затѣмъ диференціальнымъ исчисленіемъ, синтетическая геометрія была почти въ полномъ пренебреженіи до конца восемнадцатаго столѣтія. Но блестящіе, геніальные труды Дезарга и Паскаля подготовили почву для появленія на сцену въ началѣ девятнадцатаго вѣка такъ называемой *высшей геометріи*, при разработкѣ которой главнымъ образомъ выдѣлились Монжъ, Карно, Понселе и Шаль.

Монжъ (1746—1818), этотъ даровитый инженеръ, славный основатель знаменитой Ecole Polytechnique въ Парижѣ, давшей столько крупныхъ французскихъ математиковъ, своими трудами по геометріи, вмѣстѣ съ Понселе и Карно, воскресилъ методы и пріемы Дезарга и по этому пути направилъ работы геометровъ позднѣйшаго времени. Монжъ, замѣнивъ ариѳметическія выкладки при составленіи фортификаціонныхъ работъ геометрическими методами, положилъ начало начертательной геометріи *),какъ отдѣльной отрасли науки, въ чемъ и заключается

*) См. статью о начертательной геометріи.

его главная заслуга. Начертательная геометрія Монжа послужила свѣточемъ при изысканіи и истолкованіи результатовъ геометріи аналитической. Ученикъ Монжа—Бріаншонъ вывелъ изъ «Паскалевой теоремы», съ помощью полярныхъ линій, теорему, носящую его имя; эта теорема заключается въ слѣдующемъ: «Прямыя, соединяющія противоположныя вершины шестиугольника, образованнаго шестью касательными къ коническому сѣченію, встрѣчаются въ одной точкѣ» *).

Въ 1803 году Лазарь Карно (1753—1823)—знаменитый инженеръ и выдающійся математикъ, выпустилъ въ свѣтъ свою «Геометрію положенія», а въ 1806 году «Теорію сѣкущихъ». Карно обогатилъ науку цѣлымъ рядомъ общихъ теоремъ, относящихся къ проективнымъ свойствамъ фигуръ.

Ученикъ Монжа, Понселе (1788—1867), участвовавшій въ походѣ Наполеона въ Россію, будучи раненъ, попалъ въ плѣнъ и былъ отвезенъ въ Саратовъ. Здѣсь, въ заключеніи, лишенный книгъ, по однимъ только воспоминаніямъ о томъ, чему онъ учился въ Политехнической школѣ, онъ сталъ изучать математику и написалъ свое знаменитое сочиненіе: «Traité des propriétés projectives des figures», въ которомъ широко пользовался центральной проекціей и далъ теорію «взаимныхъ поляръ». Далѣе, въ концѣ восемнадцатаго столѣтія, появляется Карлъ-Фридрихъ Гауссъ, положившій краеугольный камень славной гёттингенской школѣ математиковъ; онъ девятнадцатилѣтнимъ юношей стоялъ на распутьи и размышлялъ, посвятить ли себя математикѣ или избрать своей спеціальностью изученіе древнихъ языковъ; построеніе правильнаго вписаннаго въ окружность 17-угольника при помощи циркуля и линейки окончательно рѣшило его судьбу. Этотъ великій математикъ далъ полную теорію построенія правильныхъ многоугольниковъ о (2^n+1) сторонахъ, гдѣ 2^n+1 простое число.

Казалось бы, что блестящія имена Декарта и Паскаля связаны съ точкой наивысшаго развитія геометріи, что въ пору пышнаго расцвѣта «золотого вѣка» французской математики,

---

*) См. статью о проэктивной геометріи.

геометрія достигла уже апогея своего развитія; но этимъ не ограничиваются успѣхи геометріи.

Нашъ великій соотечественникъ Н. И. Лобачевскій создаетъ новую эру въ исторіи науки.

Еще со временъ Альбрехта Дюрера начались безплодныя попытки упростить и усовершенствовать теорію параллельныхъ линій. Эвклидовъ постулатъ о параллельныхъ приводилъ въ смущеніе многихъ геометровъ. Пошли многочисленныя попытки *доказать аксіому* или *замѣнить* ее другой, болѣе очевидной. Дюреръ въ своей геометріи, изданной въ 1525 году, пытался опредѣлить параллельныя линіи, какъ *равноотстоящія* другъ отъ друга на всемъ своемъ протяженіи. Позже Вариньонъ (1654—1722) опредѣлилъ параллельныя линіи, какъ прямыя, составляющія *равные углы* съ третьей прямой. Еще позже наибольшимъ распространеніемъ пользовалось опредѣленіе параллельныхъ линій, какъ прямыхъ, имѣющихъ одно и то же направленіе.

Лучшіе математики употребляли гигантскія усилія дать болѣе ясную и удачную формулировку аксіомы, пока не пришли къ убѣжденію, что всѣ новыя опредѣленія отличаются отъ даннаго Эвклидомъ не по существу, а по формѣ. Та же участь постигла и *старанія доказать аксіому*. Французскій геометръ Лежандръ (1752—1833), замѣтивъ, что Эвклидовъ постулатъ равносиленъ теоремѣ о равенствѣ суммы угловъ треугольника двумъ прямымъ, пытался доказать, что сумма угловъ треугольника не можетъ быть ни больше, ни меньше двухъ прямыхъ и этой теоремой доказать постулатъ Эвклида. Но ему удалось лишь доказать, что сумма угловъ треугольника не можетъ быть больше двухъ прямыхъ.

Пока Лежандръ все еще старался установить справедливость аксіомы параллельныхъ линій, знаменитый русскій математикъ Николай Ивановичъ Лобачевскій (1793—1856), профессоръ Казанскаго университета, рѣшился сдѣлать очень смѣлый шагъ; онъ отвергъ постулатъ, который въ теченіе двухъ тысячъ лѣтъ былъ краеугольнымъ камнемъ всего зданія геометріи. Славный профессоръ Казанскаго университета, благодаря высокому полету своей философской мысли, показалъ возможность построе-

нія системы геометріи безъ аксіомы параллельныхъ линій. Въ своей рѣчи, произнесенной передъ физико-математическимъ факультетомъ Казанскаго университета, и напечатанной въ «Казанскомъ Вѣстникѣ» за 1829 г. а затѣмъ въ «Ученыхъ Запискахъ Казанскаго университета» за 1836—1838 гг., Лобачевскій впервые обнародовалъ свой взглядъ на допущенную въ созданной имъ «Воображаемой геометріи» основную мысль, находящуюся въ противорѣчіи съ аксіомой параллельныхъ линій. Въ основу «Воображаемой геометріи» Лобачевскаго легли два основныхъ положенія, что «черезъ каждую точку на плоскости можно провести *неограниченное* число прямыхъ, ни одна изъ которыхъ не пересѣкаетъ данной прямой» и что «сумма угловъ треугольника перемѣнна, хотя и всегда остается меньше, чѣмъ два прямыхъ угла». (Кэджори)..

Отвлеченныя соображенія Лобачевскаго нашли себѣ реальное воплощеніе въ псевдосферическихъ поверхностяхъ, обезсмертившихъ имя Бельтрами.

Въ дальнѣйшемъ неевклидова геометрія получаетъ разнообразныя развѣтвленія. Георгъ Риманъ развиваетъ системы геометрій *n* измѣреній. Эти новыя геометріи управляются законами, отличными отъ законовъ обыкновенной геометріи.

На всемъ протяженіи девятнадцатаго столѣтія геометрическая мысль не останавливается. Штейнеръ выдвигаетъ идею о проективномъ происхожденіи геометрическихъ фигуръ и прилагаетъ анализъ къ проективной геометріи.

Фонъ-Штаудтъ (1798—1867) создаетъ чисто синтетическую геометрію положенія, независимую отъ всякаго измѣренія.

Англичанинъ Кэли и французъ Лагерръ вводятъ идею измѣренія въ проективную геометрію, выводя на сцену такъ называемыя круговыя точки на плоскости и безконечно далекій кругъ въ пространствѣ. Но и теперь, когда каждый изъ насъ, при взглядѣ на общую картину современной геометріи, приходитъ въ восторгъ отъ силы творческаго генія человѣка, наука еще ждетъ новыхъ и новыхъ геніальныхъ людей, которые мощнымъ взлетомъ своей мысли еще болѣе расширятъ тѣ горизонты, которые созерцаетъ современное человѣчество.

Идя шагъ за шагомъ по тропинкѣ историческаго развитія геометріи, вступая вмѣстѣ съ нею въ мрачную эпоху средневѣковья, когда господствуетъ непросвѣтная тьма, когда царствуетъ грубое суевѣріе и жестокій фанатизмъ, когда мѣсто точныхъ наукъ занимаютъ алхимія, астрологія и магія, нельзя не выразить чувства искренней радости, когда, благодаря идеямъ гуманизма, восторжествовавшимъ въ Европѣ въ началѣ нашей новой исторіи, математическая мысль пробудилась отъ вѣкового сна, вырвалась изъ заколдованнаго круга схоластики на свѣтлый и широкій путь общечеловѣческаго прогресса и пышно расцвѣла, благодаря мощному генію великихъ и славныхъ математиковъ.

Нѣсколько задачъ.

Задача 1.

Составить изъ шести спичекъ четыре равностороннихъ треугольника.

Рѣшеніе. Если пытаться рѣшить эту задачу на плоскости, то трудъ, потраченный на это, окажется безполезнымъ; но стоитъ только перенестись мыслью въ пространство, какъ рѣшеніе задачи окажется легко выполнимымъ. Для этого достаточно составить изъ данныхъ шести спичекъ тетраэдръ; мы получимъ четыре равностороннихъ треугольника, при чемъ одинъ изъ нихъ будетъ служить основаніемъ тетраэдра, а остальные три—его боковыми гранями.

Задача 2.

Сосудъ цилиндрической формы наполненъ до верху водой. Требуется вылить изъ сосуда ровно половину содержимаго, не прибѣгая къ помощи какихъ-либо измѣрительныхъ приборовъ. Какъ это сдѣлать?

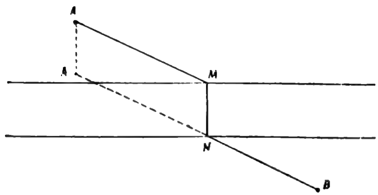
Рѣшеніе. Для рѣшенія данной задачи слѣдуетъ привести сосудъ въ такое положеніе, чтобы поверхность оставшейся въ немъ воды касалась съ одной стороны наиболѣе низкой точки верхней части сосуда, а съ другой наиболѣе высокой точки дна сосуда..

Въ этомъ случаѣ поверхность жидкости раздѣлитъ данный цилиндрическій сосудъ на двѣ равныя части и количество

оставшейся въ сосудѣ жидкости будетъ равно половинѣ ея первоначальнаго количества.

Задача 3.

Изъ села въ городъ проводится шоссейная дорога, которая должна въ нѣкоторомъ мѣстѣ пересѣчь рѣку, имѣющую въ районѣ постройки одинаковую ширину и прямолинейное направленіе.



Черт. 1.

Опредѣлить мѣсто для постройки моста такъ, чтобы путь изъ села въ городъ былъ кратчайшимъ.

Рѣшеніе. Изъ разсмотрѣнія прилагаемаго чертежа, на которомъ *AA*—длина моста, не трудно понять рѣшеніе данной задачи.

4. Карандаши и нитки.

Ниткой опредѣленной длины перевязана дюжина карандашей. Сколько карандашей можно перевязать ниткой, которая длиннѣе первой въ два раза?

Рѣшеніе. Обозначимъ длину первой нитки черезъ a. Тогда длина второй будетъ $2a$. Дюжина карандашей, перевязанная первой ниткой, дастъ въ сѣченіи нѣкоторый многоугольникъ съ площадью S.

Обвязавъ же второй ниткой возможно большее число карандашей, мы получимъ въ сѣченіи нѣкоторую площадь S_1. Пусть контуръ этой площади есть фигура, подобная первому многоугольнику.

Извѣстно, что площади относятся, какъ квадраты периметровъ; поэтому

$$S_1 : S = (2a)^2 : a^2 = 4a^2 : a^2 = 4 : 1.$$

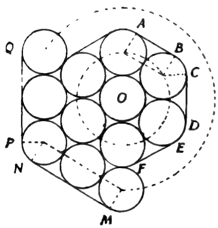
Откуда $$S_1 = 4S.$$

Такимъ образомъ, если первая площадь получалась отъ сѣченія дюжины карандашей, то вторая, которая въ четыре раза больше первой, должна получиться отъ сѣченія 4-хъ дюжинъ. Псэтсму ниткой, длиною въ $2a$, можно обвязать 48 карандашей.

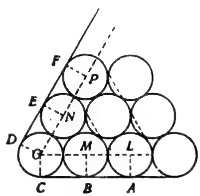
Таково *приблизительное* рѣшеніе задачи. Постараемся теперь эту задачу обобщить и рѣшить болѣе точно. Для большей простоты возьмемъ круглые карандаши.

Извѣстно, что изъ всѣхъ геометрическихъ фигуръ съ равными периметрами наибольшей величиною площади обладаетъ кругъ, а изъ другихъ фигуръ у той будетъ площадь больше, которая болѣе всего приближается къ кругу. Поэтому карандаши, связанные прямоугольникомъ, выгоднѣе связать равностороннимъ треугольникомъ, еще выгоднѣе квадратомъ, но самое выгодное шестиугольникомъ.

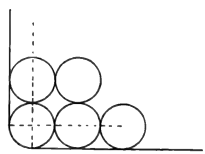
На чертежахъ 2, 3 и 4 представлены три схемы располо-



Черт. 2.



Черт. 3.


Черт. 4.

женія карандашей. Установимъ для каждой схемы связь между длиной связующей нити и числомъ карандашей.

На чертежѣ 2 нитью $ABCD...$ обвязано 6 карандашей (внутренняго карандаша—O пока не считаемъ). Длина нити l состоитъ изъ 6-ти равныхъ касательныхъ: AB, CD... и 6-ти равныхъ дугъ: BC, DE..., а потому

$$l = 6AB + 6BC.$$

Но $AB = 2r$, а $BC = \frac{2\pi r}{6}$, гдѣ r—радіусъ карандаша, а потому

$$l = 12r + 6 \cdot \frac{2\pi r}{6} = 2r(6 + \pi).$$

Если возьмемъ второе кольцо $MNPQ$... (оно на чертежѣ не полное), которымъ обвязано 12 карандашей, то

$l=6MN+6NP$ или, пользуясь тѣми же разсужденіями,

$$l=6.4r+2\pi r=2r(12+\pi).$$

Запишемъ полученные результаты въ слѣдующую таблицу:

Длина нити.	№ кольца.	Число карандашей въ кольцѣ.	Число карандашей всего.	
$2r(6+\pi)$	1	6	7	
$2r(12+\pi)$	2	12	19	...(A)
$2r(6n+\pi)$	n	$6n$	$3n(n+1)+1$.	

Легко видѣть, что число карандашей въ каждомъ кольцѣ равно n—1 члену ариѳметической прогрессіи, у которой первый членъ $a=6$, а разность $d=6$.

Все же число карандашей, помѣщающееся внутри n колецъ, равно суммѣ n членовъ этой ариѳметической прогрессіи плюсъ еще одинъ карандашъ—центральный. Итакъ, все число карандашей равно $(6+6\pi)\ \dfrac{n}{2}+1=3n(n+1)+1$.

Аналогично поступаемъ и въ томъ случаѣ, когда карандаши расположены треугольникомъ (черт. 3). Длина нити l, связывающей карандаши въ формѣ треугольника MON, равна

$$l=3BC+3CD.$$

Но $BC=2r$, а $CD=\dfrac{2\pi r}{3}$; поэтому

$$l=3\,.\,2r+3\,.\,\frac{2\pi r}{3}=2r(3+\pi).$$

Для треугольника LOP, гдѣ связано 6 карандашей

$$l=2r(6+n).$$

По предыдущему составляемъ таблицу:

Длина нити.	Число карандашей, составляющихъ сторону треугольника	Число карандашей, всѣхъ.	
$2r(3+\pi)$	2	3	
$2r(6+\pi)$	3	6	...(B)
$2r\left\{3(n-1)+\pi\right\}$	n	$\dfrac{n(n+1)}{2}$	

Какъ и въ предыдущемъ случаѣ, подсчетъ карандашей сводится къ нахожденію суммы членовъ прогрессіи. Здѣсь прогрессія получается такая: 1, 2, 3...n; сумма n членовъ ея равна

$$\frac{(1+n)n}{2}.$$

Никакой лишней единицы здѣсь къ суммѣ прибавлять не приходится. Она включена въ составъ членовъ прогрессіи.

Перейдемъ теперь къ черт. 4. Здѣсь представлена схема расположенія карандашей прямоугольникомъ. Разложивъ карандаши m наложенными другъ на друга рядами по n карандашей въ каждомъ, найдемъ зависимость между числомъ карандашей и длиною нити. Какъ и въ предыдущихъ случаяхъ, длина нити составляется изъ периметра четыреугольника, построеннаго на центрахъ карандашей, находящихся въ углахъ, и длины окружности одного карандаша. Длина окружности будетъ $2\pi r$.

Длина каждой изъ двухъ вертикальныхъ сторонъ четыреугольника равна $2mr—2r$, а длина каждой изъ двухъ горизонтальныхъ сторонъ четыреугольника равна $2nr—2r$.

Поэтому длина нити l будетъ

$$l=2[(2rm—2r)+(2nr—2r)]+2\pi r=2r\{2(m+n—2)+\pi\}...(C).$$

Число же карандашей равно произведенію mn. Такъ какъ число карандашей есть произведеніе mn, а длина нити зависитъ только отъ суммы этихъ чиселъ, то выгоднѣе брать m и n по возможности мало отличающимися другъ отъ друга.

Тогда число карандашей будетъ наибольшимъ (произведеніе будетъ наибольшимъ), а длина—наименьшей (сумма будетъ наименьшей).

Составимъ слѣдующую таблицу:

Длина нити.	Число карандашей.	m	n
$2r(6+\pi)$	6	3	2
$2r(12+\pi)$	12	6	2
$2r(10+\pi)$	12	3	4

Сравненіе первой строки этой таблицы съ прежними таблицами показываетъ, что дѣйствительно наивыгоднѣйшій способъ связы-

ванія карандашей—шестиугольникомъ. Сравненіе же двухъ послѣднихъ строкъ между собой обнаруживаетъ, что наивыгоднѣйшій способъ связыванія прямоугольникомъ—тотъ, при которомъ m и n возможно меньше отличаются другъ отъ друга.

Мы установили формулы, по которымъ, зная форму расположенія и число карандашей, легко вычислить длину нити, и, наоборотъ, зная форму расположенія и длину нити—найти число карандашей.

Рѣшимъ теперь слѣдующую задачу.

Дано p карандашей, обвязанныхъ ниткой опредѣленной длины. Сколько карандашей можно обвязать ниткой вдвое большей длины.

I. Карандаши расположны шестиугольникомъ въ q колецъ.

По формуламъ (A) имѣемъ

$$p=3q(q+1)+1.$$

Длина нити

$$l=2r(6q+\pi).$$

Найдемъ число колецъ (x), обвязаныхъ ниткой, длиною $l'=2l$

$$l'=2r(6x+\pi)=2l=2.2r(6q+\pi)$$

откуда

$$2r(6x+\pi)=4r(6q+\pi);$$

рѣшая полученное ур-іе, найдемъ, что

$$6x=12q+\pi \quad \text{или}$$

$$x=2q+\frac{\pi}{6}.$$

Но x, такъ же, какъ и q должно быть цѣлымъ. По найденной величинѣ x заключаемъ, что нитью вдвое большей нельзя перевязать цѣлаго числа колецъ, такъ какъ $\frac{\pi}{6}$ есть дробь. Ближайшее меньшее число колецъ есть $2q$. Тогда число обвязанныхъ карандашей будетъ $3 \,.\, (2q) \,.\, \{(2q)+1\} +1=12q^2+6q+1$.

На основаніи же подобія фигуръ, оно равно $4(3q(q+1)+1\} =$

$$=12q^2+12q+4.$$

Такимъ образомъ приближенное рѣшенiе даетъ въ данномъ случаѣ большее число карандашей.

II. Карандаши расположены треугольникомъ, по q карандашей на сторонѣ.

Пользуемся формулами (B).

$$p=\frac{q(q+1)}{2},$$

длина нити $l=2r\,\{3(q-1)+\pi\}$.

Во второй разъ, при нити длиною въ $l'=2l$, на сторонѣ треугольника расположится x карандашей. Тогда

$$l'=2r\,\{3(x-1)+\pi\},\quad \text{но намъ дано}$$
$$l'=2l=4r\,\{3(q-1)+\pi\}.$$

Составляемъ уравненiе:

$$2r\,\{3(x-1)+\pi\}=4r\,\{3(q-1)+\pi\};$$

рѣшая его, найдемъ, что

$$x=2q-1+\frac{\pi}{3}=2q+\left(\frac{\pi}{3}-1\right).$$

Мы видимъ, что и въ этомъ случаѣ нельзя перевязать цѣлаго числа карандашей, такъ какъ x получается дробное.

Ближайшее меньшее цѣлое значенiе для x есть $x=2q$.

Все число карандашей будетъ равно

$$\frac{2q\cdot(2q+1)}{2}=2q^2+q.$$

На основанiе подобiя фигуръ оно равно

$$4\cdot\left\{\frac{q(q+1)}{2}\right\}=2q^2+2q.$$

III. Карандаши расположены прямоугольникомъ, въ s рядовъ по t карандашей въ каждомъ.

Число карандашей

$$p=st.$$

По формулѣ (C) длина нити

$$l=2r\{2(s+t-2)+\pi\}.$$

Какъ и раньше, составляемъ два выраженія для длины нити $l'=2l$ и приравниваемъ одно другому. Искомыми будутъ число рядовъ (x) и число карандашей въ рядѣ (y).

$$2r\{2(x+y-2)+\pi\}=4r\{2(s+t-2)+\pi\}$$

откуда

$$x+y=2(s+t)-2+\frac{\pi}{2}, \quad \text{или}$$

$$x+y=2s+2t+\left\{\frac{\pi}{2}-2\right\}.$$

Такъ какъ x и y должны быть цѣлыми числами, а выраженіе въ скобкахъ есть дробь, то и въ этомъ случаѣ нельзя перевязать цѣлаго числа карандашей.

Такъ какъ выраженіе въ скобкахъ отрицательно, то ближайшее меньшее значеніе для $x+y$ будетъ

$$x+y=2s+2t-1.$$

Отсюда сразу находимъ два рѣшенія

$$\begin{matrix} x=2s \\ y=2t-1 \end{matrix} \quad \text{или} \quad \begin{matrix} x=2s-1 \\ y=2t. \end{matrix}$$

Въ зависимости отъ величинъ s и t нужно брать то или другое изъ этихъ рѣшеній; если $t>s$, то беремъ 1-е рѣшеніе, если же $s>t$, то второе.

Число карандашей будетъ

$$\text{или } xy=p'=2s(2t-1) \quad \text{или} \quad xy=p'=2t(2s-1).$$

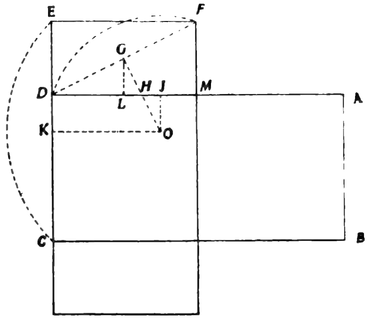
На основаніи же подобія фигуръ $p'=4(st)=4st$

5. Задача столяра.

Когда доска ломбернаго стола раскрыта, она имѣетъ форму квадрата. Когда же она сложена, то

принимаетъ видъ прямоугольника. Опредѣлить на доскѣ мѣсто для винта, около оси котораго она должна вращаться, чтобы располагаться симметрично относительно ножекъ стола.

Рѣшеніе. Пусть $ABCD$ будетъ двойная доска ломбернаго стола, которая въ этомъ положеніи совпадаетъ съ рамой для ножекъ. Вращая доску по направленію движенія стрѣлки часовъ около винта O мы приведемъ ее въ положеніе $EFMC$ и тогда она, будучи раскрыта, представитъ собой квадратъ, опять-таки симметрично расположенный относительно ножекъ. Опредѣлимъ мѣстоположеніе винта O.



Черт. 5.

Замѣтимъ, что уголъ C доски опишетъ при вращеніи дугу радіуса CO и попадетъ въ точку E. Сторона CE будетъ хордой этой дуги. Точно такъ же уголъ D, описавъ дугу радіуса DO, попадетъ въ точку F. Линія DF будетъ хордой этой дуги. Мы знаемъ, что радіусъ, перпендикулярный къ хордѣ, дѣлитъ ее пополамъ. Поэтому, раздѣливъ хорды CE и DF пополамъ и возставивъ изъ найденныхъ срединъ перпендикуляры, заключаемъ, что центръ дугъ долженъ находиться на обоихъ этихъ перпендикулярахъ, а это можетъ быть только тогда, когда онъ находится въ точкѣ ихъ пересѣченія.

Обозначивъ длину DC черезъ a, заключаемъ, что $AD=2a$ и $DE=\frac{a}{2}$.

Такимъ образомъ $CE=a+\frac{a}{2}=\frac{3}{2}a$ и $EK=\frac{EC}{2}=\frac{3}{4}a$;

поэтсму

$$DK=EK-DE=\frac{1}{4}a.$$

Далѣе, изъ подобія $\triangle\triangle$-ковъ DQL и DFM заключаемъ, что $QL=\frac{1}{4}a$ и $DL=\frac{1}{2}a$. Изъ подобія же $\triangle\triangle$-ковъ DGL и LGH видно, что $LH=\frac{1}{8}a$.

Изъ равенства $\triangle\triangle$-ковъ LQH и IHO слѣдуетъ, что $LH=HI=\frac{1}{8}a$.

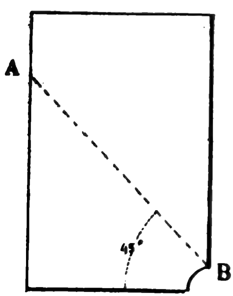
Такимъ образомъ

$$DI=DL+LH+HI=\frac{1}{2}a+\frac{1}{8}a+\frac{1}{8}a=\frac{3}{4}a.$$

Слѣдовательно, перпендикуляры, опущенные изъ точки O на стороны, дѣлятъ короткую сторону въ отношеніи 1 : 3, а длинную въ отношеніи 3 : 5.

6. Геометрическая загадка.

Въ срединѣ листа писчей бумаги сдѣлано круглое отверстіе величиною въ двадцатикопѣечную монету. Предлагается просунуть черезъ это отверстіе серебряный рубль, не разрывая бумаги.



Черт. 6.

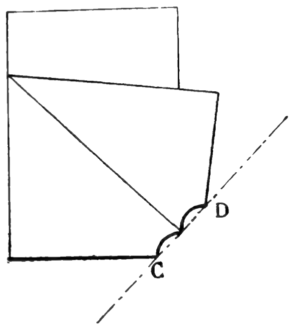
Рѣшеніе. Рѣшеніе этой геометрической задачи, которая на первый взглядъ покажется многимъ, незнакомымъ съ ней, чѣмъ-то невозможнымъ и невѣроятнымъ, однако вполнѣ возможно и достигается слѣдующимъ образомъ.

Сложимъ данный листъ вчетверо, такъ, чтобы линіи сгиба прошли черезъ воображаемый центръ вырѣзаннаго кружка и пересѣ-

клись по двумъ взаимно перпендикулярнымъ направленіямъ— горизонтальному и вертикальному. Затѣмъ у сложеннаго вчетверо листа отогнемъ одинъ изъ нижнихъ угловъ такъ, какъ показано на рис. 7, т.-е. такъ, чтобы линія сгиба прошла черезъ верхнюю точку вырѣзаннаго кружка и образовала съ горизонталью уголъ въ 45° (см. черт. 6).

Затѣмъ расправляемъ листъ, держа одной рукой за отогнутый, а другой за неотогнутый уголъ нижняго края листа такъ, чтобы онъ образовалъ собой родъ плоской воронки, которая будетъ имѣть отверстіе, указанной на чертежѣ формы двухъ четвертей окружности, опирающихся концами на одну прямую линію.

Длина такого отверстія, какъ можно вычислить, будетъ больше діаметра кружка и равна двумъ сторонамъ вписаннаго въ окружность квадрата, т.-е. $CD=2R\sqrt{2}$.



Черт. 7.

Она почти равна діаметру серебрянного рубля, который, хотя и туго, но неразрывая, а только нѣсколько растягивая бумагу, проходитъ ребромъ черезъ отверстіе. Всякая другая меньшая монета, напр., въ 50 коп. легко проходитъ черезъ него.

Замѣтимъ, что расправляя листъ въ воронку, не нужно крѣпко сжимать отогнутый уголъ, чтобы внутренняя часть листа могла скользить и дать возможность листу расправиться.

7. Земля и апельсинъ.

Земной шаръ и апельсинъ обтянуты по экваторамъ веревочными кольцами. Длину того и другого кольца мы увеличиваемъ на нѣкоторую величину d и новыя кольца располагаемъ концентрически каждое со своимъ шаромъ.

Въ какомъ изъ этихъ случаевъ веревка будетъ отстоять дальше отъ поверхности шара?

Рѣшеніе. Обозначимъ радіусъ земли черезъ R, а апельсина— черезъ r. Тогда длины ихъ окружностей соотвѣтственно будутъ для земли $2\pi R$, а для апельсина $2\pi r$.

Послѣ увеличенія на d каждой окружности найдемъ, что длина земного кольца будетъ $2\pi R+d$, а апельсиннаго $2\pi r+d$. Отсюда легко опредѣлить радіусы колецъ.

Радіусъ 1-го кольца $R_1=\frac{2\pi R+d}{2\pi}=R+\frac{d}{2\pi}\cdot$

Радіусъ 2-го кольца $r_1=\frac{2\pi r+d}{2\pi}=r+\frac{d}{2\pi}\cdot$

Такъ какъ разстояніе отъ центра земли до ея поверхности равно R, а до ея кольца $R+\frac{d}{2\pi}$, то, вычтя изъ второй величины первую, найдемъ разстояніе L отъ поверхности земли до кольца будемъ имѣть:

$$L=R+\frac{d}{2\pi}-R=\frac{d}{2\pi}\cdot$$

Но такимъ же будетъ и разстояніе l отъ поверхности апельсина до его кольца.

Дѣйствительно, какъ и въ первомъ случаѣ, это разстояніе равно разности между радіусами кольца и апельсина, т.-е.

$$l=r+\frac{d}{2\pi}-r=\frac{d}{2\pi}\cdot$$

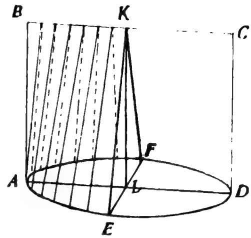
Поэтому въ обоихъ случаяхъ веревка будетъ отстоять отъ поверхностей на одинаковомъ разстояніи.

8. Интересное тѣло.

Найти видъ тѣла, которое могло бы свободно проходить и плотно закрывать собою три отверстія: въ видѣ круга, квадрата и равнобедреннаго треугольника.

Рѣшеніе. Такое тѣло дѣйствительно существуетъ. Это, такъ называемый *коноидальный клинъ*, который легко построить.

Для этого возьмемъ кругъ. На одномъ изъ его діаметровъ, напр. на AD, построимъ квадратъ; сторона его, конечно, будетъ равна діаметру.



Черт. 8.

Если теперь всѣ точки отрѣзка BC соединить съ точками окружности прямыми линіями, то получимъ рядъ равнобедренныхъ треугольниковъ, отличающихся одинъ отъ другого величиной угла при вершинѣ. Самые «узкіе» изъ нихъ—прямыя линіи AB и CD. Чѣмъ ближе къ срединѣ отрѣзка BC они будутъ располагаться, тѣмъ «шире» эти треугольники становятся, т.-е. тѣмъ больше становится ихъ уголъ при вершинѣ. Самымъ «широкимъ» будетъ тотъ, стороны котораго соединяютъ средину отрѣзка BC, точку K, съ діаметромъ EF, перпендикулярнымъ къ AD.

Если двигать полученное тѣло по линіи AD, то, встрѣтивъ отверстіе, равное EKF, оно его плотно закроетъ и въ то же время пройдетъ сквозь него. Если его двигать по линіи EF, получится то же съ отверстіемъ въ видѣ квадрата $ABCD$.

Наконецъ, если его двигать по линіи LK, то оно закроетъ круглое отверстіе $AFDE$ и въ то же время пройдетъ сквозь него.

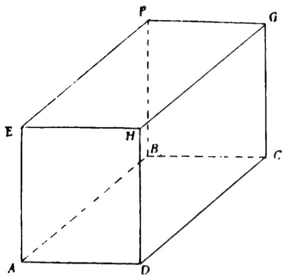
9. Задача о паукѣ и мухѣ.

Комната имѣетъ форму прямоугольнаго параллелепипеда. Въ одномъ изъ угловъ комнаты находится паукъ, а въ противоположномъ углу—муха. Найти кратчайшій путь, по которому паукъ можетъ добраться до мухи *).

---

*) Приводимая задача заимствована изъ книги г. Игнатьева «Въ царствѣ смекалки» и принадлежитъ г. Перельману. Рѣшеніе задачи приведено въ нѣсколько измѣненномъ видѣ.

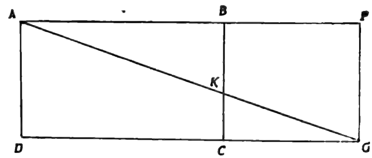
Рѣшеніе. Пусть паукъ находится въ вершинѣ A параллелепипеда, а муха въ G. Сравнимъ длины различныхъ путей, по которымъ паукъ можетъ доползти до мухи. Такъ какъ кратчайшій путь между двумя точками на плоскости будетъ прямой линіей, то путь между двумя точками, расположенными на двухъ различныхъ и пересѣкающихся плоскостяхъ или граняхъ двуграннаго угла дастъ въ разверткѣ этого угла въ плоскость прямую линію. Поэтому для рѣшенія задачи необходимо развернуть данный параллелепипедъ въ плоскость и сравнить между собой всѣ возможные прямолинейные (въ разверткахъ) пути, по которымъ паукъ можетъ доползти до мухи.



Черт. 9.

Разсмотримъ, напримѣръ, двугранный уголъ $ABCG$, имѣющій ребромъ BC; онъ соотвѣтствуетъ случаю, когда паукъ будетъ ползти по полу (т.-е. по грани $ABCD$) и по стѣнѣ $BFGC$.

Развернувъ этотъ двугранный уголъ въ плоскость, соединимъ точки A и H прямой, которая и будетъ кратчайшимъ путемъ отъ A до G, при чемъ отрѣзокъ AK будетъ соотвѣтствовать пути по полу, а отрѣзокъ KG—по стѣнѣ. Такимъ же образомъ можно опредѣлить кратчайшій путь для двуграннаго угла $ADHG$ (по двумъ стѣнамъ), и для двуграннаго угла $ADCG$ (по полу и стѣнѣ).



Черт. 10.

Можно разсмотрѣть и всѣ остальные двугранные угла, по которымъ можетъ проползти паукъ, но въ каждомъ изъ этихъ случаевъ кратчайшій путь будетъ равенъ одному изъ разсмотрѣнныхъ.

Остается рѣшить вопросъ, который изъ трехъ разобранныхъ случаевъ пути самый кратчайшій.

Отвѣтъ на этотъ вопросъ будетъ всецѣло зависѣть отъ измѣреній параллелепипеда и приведется къ примѣненію теоремы Пиѳагора.

Разсмотрѣнную задачу можно видоизмѣнить и, предположивъ, что скорость паука при движеніи его по различнымъ гранямъ параллелепипеда различна, рѣшить вопросъ о нахожденіи такого пути, по которому паукъ можетъ достигнуть точки A въ кратчайшій промежутокъ времени.

Послѣдняя задача относится болѣе къ области механики и физики и тѣсно связана съ вопросомъ о преломленіи лучей при переходѣ изъ одной средины въ другую. Оказывается, что въ случаяхъ различныхъ скоростей, путь, проходимый какой-либо матеріальной точкой по двумъ различнымъ плоскостямъ въ minimum времени будетъ представлять не прямую, а ломаную линію.

Задачу о паукѣ и мухѣ можно измѣнить еще слѣдующимъ образомъ:

Данъ прямой круглый цилиндръ. На окружности нижняго основанія цилиндра дана точка, а на окружности верхняго основанія, въ пересѣченіи ея съ образующей, діаметрально противоположной образующей, проходящей черезъ первую данную точку, дана другая точка. Найти кратчайшій путь по поверхности цилиндра между этими точками.

Оказывается, что въ данномъ случаѣ возможны два пути. Одинъ по боковой поверхности полуцилиндра *), а другой по діаметру окружности основанія и образующей.

Какой изъ этихъ двухъ путей кратчайшій будетъ зависѣть отъ величины радіуса основанія цилиндра r и высоты цилиндра h. Если $h > \frac{r(\pi^2-4)}{4}$, то путь по винтовой линіи будетъ кратчайшимъ и обратно.

Если же $h = \frac{r(\pi^2-4)}{4} = 1{,}466\, r$, то оба пути будутъ одинаковы.

---

*) По винтовой линіи, представляющей половину полнаго оборота для цилиндра вдвое большей величины.

Задачи на вычисленіе геометрической вѣроятности.

Разсмотримъ здѣсь рядъ задачъ на вычисленіе вѣроятностей.

Во второмъ томѣ хрестоматіи было указано, что называется вѣроятностью. Тамъ же мы видѣли, что съ цѣлью количественной оцѣнки вѣроятностей необходимо прежде всего установить всѣ возможныя статочности или шансы. Если эти шансы между собою равносильны, то, раздѣливъ число m всѣхъ благопріятствующихъ событію шансовъ на число n всѣхъ возможныхъ, мы и получимъ вѣроятность даннаго событія въ видѣ $p=\frac{m}{n}$.

Такъ мы поступали, когда число всѣхъ статочностей было конечно. Но если оно будетъ безконечно велико, то и тогда поступаютъ точно такимъ же образомъ.

Рѣшимъ слѣдующую задачу.

Пусть нѣкоторая точка должна упасть внутри данной площади S и пусть условія таковы, что она можетъ упасть гдѣ угодно внутри S, т.-е. всѣ точки S равноправны.

Требуется найти вѣроятность того, что наша точка упадетъ внутри нѣкоторой площади s. На основаніи сказаннаго ранѣе условимся оцѣнивать эту вѣроятность дробью $p=\frac{s}{S}$.

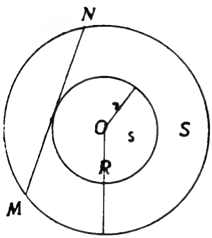
Такого рода вѣроятности называются *геометрическими*, такъ какъ онѣ являются результатомъ примѣненія теоріи вѣроятностей къ вопросамъ геометріи.

Геометрическія вѣроятности характеризуются тѣмъ, что число статочностей безконечно велико.

Въ задачахъ такого рода мы можемъ натолкнуться на довольно-таки пародоксальное заключеніе, а именно, что событіе, возможное въ обыденномъ смыслѣ слова, окажется съ точки зрѣнія теоріи вѣроятностей невозможнымъ, т.-е. имѣющимъ вѣроятность, равную нулю. Въ самомъ дѣлѣ, найдемъ вѣроятность того, что наша точка, падая внутри S, упадетъ на нѣкоторую линію s. Сначала найдемъ вѣроятность паденія на узкую полосу, площадью въ s'. Она выразится формулой $p=\frac{s'}{S}$. Будемъ уменьшать ширину полосы, и когда она обратится въ линію s, ея площадь s' будетъ равна нулю. Поэтому и p будетъ нулемъ.

Рѣшимъ нѣсколько задачъ.

Вычислимъ вѣроятность событія, что наудачу проведенная хорда будетъ болѣе стороны правильнаго вписаннаго треугольника.



Черт. 11.

Будемъ отмѣчать средину каждой проводимой нами хорды. Тогда легко замѣтить, что средины хордъ, большихъ, чѣмъ сторона MN вписаннаго правильнаго треугольника, могутъ упасть и упадутъ только внутри площади s. Итакъ, средины всѣхъ возможныхъ хордъ будутъ покрывать весь кругъ, а средины хордъ, большихъ стороны правильнаго вписаннаго въ окружность $\triangle$-ка, будутъ покрывать только кругъ s. Искомая вѣроятность будетъ $p=\frac{s}{S}$.

Но $S=\pi R^2$, гдѣ R радіусъ большого круга, а $s=\pi r^2$, гдѣ r—радіусъ малаго круга, причемъ $r=\frac{R}{2}$. Отсюда $s=\frac{1}{4}\pi R^2$ поэтому

$$p=\frac{s}{S}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi R^2}{\pi R^2}=\frac{1}{4}.$$

Перейдемъ теперь къ болѣе сложному примѣру.

Вычислить вѣроятность того событія, что изъ трехъ частей случайно разломаннаго безконечно тонкаго стержня можно образовать треугольникъ.

Рѣшеніе. Будемъ считать длину всего стержня за единицу, а длины трехъ его частей, на которыя онъ распался, обозна-

чимъ буквами x, y и z. Числа x, y и z всѣ положительныя и каждое можетъ быть любой величиной отъ 0 до 1, при чемъ, однако, всегда соблюдается условіе, что $x+y+z=1$.

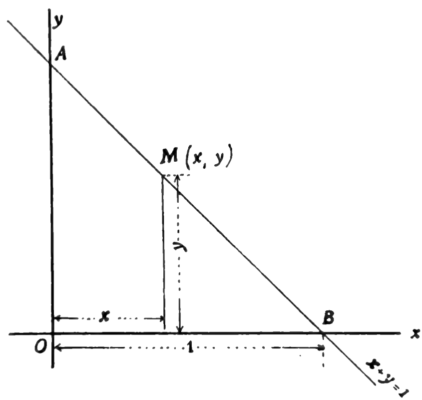
Изъ этого условія получаемъ: $x+y=1-z$......(1).

Такъ какъ z—любая величина между 0 и 1, то

$$x+y\leqq 1\ldots\ldots(2).$$

Подобравъ соотвѣтствующія значенія для x и y, согласно условію (2), мы всегда найдемъ z изъ условія (1). Для дальнѣйшаго изслѣдованія примѣнимъ методъ координатъ. Возьмемъ прямоугольныя оси координатъ xOy.

Уравненіе $x+y=1$ выражаетъ, какъ мы знаемъ, прямую линію, (см. статью «Аналит. геом.»), отсѣкающую на осяхъ координатъ отрѣзки OA и OB, равные единицѣ. Всѣ точки, координаты которыхъ удовлетворяютъ условію (2), будутъ лежать какъ разъ въ треугольникѣ AOB, такъ какъ линія AB раздѣляетъ всѣ точки плоскости yOx на три части. Въ треугольникѣ AOB лежатъ точки, для координатъ которыхъ выполняется условіе $x+y<1$. На самой линіи лежатъ точки, для координатъ которыхъ выполнено условіе $x+y=1$, и, наконецъ, для всѣхъ точекъ плоскости $yABx$ выполняется условіе $x+y>1$. Слѣдовательно, точки треугольника AOB соотвѣтствуютъ всѣмъ возможнымъ статочностямъ, существующимъ въ данной задачѣ.



Черт. 12,

Обозначимъ площадь треугольника буквою S.

Мы учли только одно условіе $x+y+z=1$, т.-е. что всѣ три обломка всегда составляютъ цѣлый стержень, и разсматривали

всѣ обломки, какіе только могутъ быть. Теперь выдѣлимъ изъ числа всѣхъ обломковъ тѣ, изъ которыхъ можно составить треугольникъ. Мы знаемъ, что если x, y, и z суть стороны треугольника, то должны соблюдаться слѣдующія условія

$$x+y>z,\quad y+z>x \text{ и } x+z>y \ldots\ldots (3), \text{ т.-е.}$$

что сумма двухъ сторонъ $\triangle$-ка всегда больше третьей стороны.

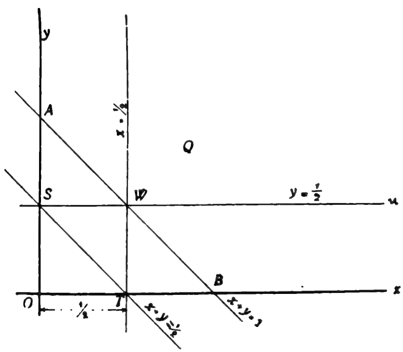
Исключимъ изъ этихъ условій z. Для этого опредѣлимъ его изъ условія (1)

$$z=1-x-y,$$

и подставимъ это выраженіе z въ наши условія (3). Получимъ

$$\left.\begin{array}{l} x+y>1-x-y \\ y+1-x-y>x \\ x+1-x-y>x \end{array}\right\} \text{Откуда } \left\{\begin{array}{r} x+y>\frac{1}{2} \ldots\ldots\ldots \\ x<\frac{1}{2} \ldots\ldots\ldots \\ y<\frac{1}{2} \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots\ldots (4)$$

Вотъ какимъ условіямъ удовлетворяютъ длины тѣхъ отрѣзковъ, изъ которыхъ можно построить треугольникъ.



Черт. 13.

Мы видимъ, что длина одного обломка меньше половины длины всего стержня, а длина двухъ обломковъ больше половины всего стержня.

Посмотримъ, гдѣ же на нашей плоскости точки, координаты которыхъ удовлетворяютъ условіямъ (4). Проведемъ прямыя, для которыхъ

$$1)\ x=\frac{1}{2},\quad 2)\ y=\frac{1}{2} \text{ и, наконецъ, } 3)\ x+y=\frac{1}{2}.$$

Первая линія параллельна оси y и отстоитъ отъ нея вправо на разстояніи, равномъ $\frac{1}{2}$. Она показываетъ, что всѣ тѣ точки, для которыхъ $x<\frac{1}{2}$ лежатъ влѣво отъ нея, на полосѣ $yOTW$.

Вторая прямая параллельна оси Ox и отстоитъ отъ нея вверхъ на разстояніи, равномъ $\frac{1}{2}$. Она показываетъ, что всѣ точки, для которыхъ $y<\frac{1}{2}$ лежатъ внизъ отъ нея, на полосѣ $uSOx$.

Наконецъ третья линія $x+y=\frac{1}{2}$ параллельна прежней нашей прямой $(x+y=1)$; она отсѣкаетъ на осяхъ координатъ отрѣзки, равныя $\frac{1}{2}$. Въ свою очередь эта прямая разграничиваетъ нашу плоскость и показываетъ, что точки плоскости, для которыхъ $x+y>\frac{1}{2}$ лежатъ по другую ея сторону, чѣмъ начало координатъ O, на части плоскости $ySTx$.

Но мы видѣли, что обломки, изъ которыхъ можно составить треугольникъ, удовлетворяютъ сразу всѣмъ тремъ условіямъ (4). Посмотримъ, какія же точки удовлетворяютъ сразу этимъ условіямъ? Конечно, только точки, общія отдѣльно отмѣченнымъ нами полосамъ $yOTW$ и $uSOx$ и части плоскости $ySTx$. Легко видѣть, что это будутъ только точки треугольника SWT. Поэтому площадь этого треугольника есть площадь, обозначенная нами черезъ s.

Послѣ этого разбора нетрудно, конечно, найти искомую вѣроятность. Мы знаемъ, что она имѣетъ величину $p=\frac{s}{S}$. Легко замѣтить, что $\triangle\ AOB$ всѣми проведенными линіями разбивается на четыре равныхъ треугольника, а потому $s=\frac{1}{4}S$. Отсюда

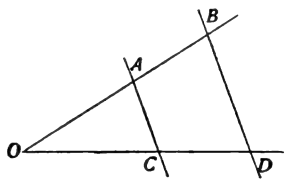
$$p=\frac{1}{4}\cdot\frac{S}{S}=\frac{1}{4}$$

Таково рѣшеніе и отвѣтъ.

Геометрическіе парадоксы и паралогизмы.

Отрѣзки двухъ параллельныхъ прямыхъ, заключенные между не параллельными, равны между собою.

Пересѣчемъ стороны угла BOD двумя параллельными прямыми. Пусть отрѣзки этихъ параллелей, заключенные между сторонами даннаго угла, будутъ AC и BD.



Черт. 14.

Изъ разсмотрѣнія подобныхъ треугольниковъ AOC и BOD будемъ имѣть:

$$\frac{OD}{OC}=\frac{OB}{OA} \text{ или } OD\,.\,OA=OC\,.\,OB.$$

Умножимъ послѣднее равенство на разность $(BD-AC)$. Тогда получимъ:

$$OD\,.\,OA\,.\,(BD-AC)=OC\,.\,OB\,.\,(BD-AC)$$

или, раскрывъ скобки,

$$OD\,.\,OA\,.\,BD-OD\,.\,OA\,.\,AC=OC\,.\,OB\,.\,BD-OC\,.\,OB\,.\,AC.$$

Перенесемъ членъ $OD\,.\,OA\,.\,AC$ въ правую часть равенства, а членъ $OC\,.\,OB\,.\,BD$ въ лѣвую; тогда

$$OD\,.\,OA\,.\,BD-OC\,.\,OB\,.\,BD=OD\,.\,OA\,.\,AC-OC\,.\,OB\,.\,AC.$$

Далѣе, вынося за скобку общихъ множителей, найдемъ:

$$BD(OD \cdot OA - OC \cdot OB) = AC(OD \cdot OA - OC \cdot OB).$$

Сокращая послѣднее равенство на выраженіе, заключенное въ скобкахъ, получимъ, что

$$BD = AC.$$

Разъясненіе. Ошибка заключается въ неправильномъ сокращеніи на выраженіе $(OD \cdot OA - OC \cdot OB)$. Оно равно нулю, а на нуль, какъ извѣстно, сокращать нельзя. Дѣйствительно, изъ разсмотрѣнія чертежа находимъ, что

$$OD : OC = OB : OA \text{ или } OD \cdot OA = OC \cdot OB,$$

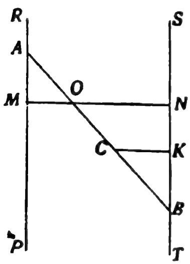
откуда

$$OD \cdot OA - OC \cdot OB = 0.$$

Отрѣзокъ прямой равенъ части этого же отрѣзка.

(Часть равна цѣлому).

Пусть данъ отрѣзокъ MN прямой. Проведемъ перпендикулярно MN двѣ прямыя RP и ST и какую-либо прямую AB, пересѣкающую MN въ точкѣ O. Полученные треугольники AOM и NOB подобны, а потому



Черт. 15.

$$\frac{NB}{AM} = \frac{ON}{OM}, \text{ но, такъ какъ, } ON = MN - OM,$$

то

$$\frac{NB}{AM} = \frac{MN - OM}{OM} \cdots (1)$$

Проведемъ далѣе какую-либо прямую CK, параллельную MN; тогда изъ подобія треугольниковъ CKB и CNB будемъ имѣть:

$$\frac{NB}{KB} = \frac{ON}{CK} \text{ или } \frac{NB}{KB} = \frac{MN - OM}{CK} \cdots (2).$$

Опредѣлимъ изъ пропорцій (1) и (2) отрѣзокъ NB; найдемъ:

$$NB = \frac{AM(MN-OM)}{OM} \quad \text{и} \quad NB = \frac{KB(MN-OM)}{CK},$$

откуда

$$AM \cdot CK \cdot (MN-OM) = KB \cdot OM \cdot (MN-OM),$$

или, раскрывая скобки,

$$AM \cdot MN \cdot CK - AM \cdot CK \cdot OM = OM \cdot KB \cdot MN - OM^2 \cdot KB.$$

Прибавимъ къ обѣимъ частямъ полученнаго равенства выраженіе ($AM \cdot MO \cdot CK - KB \cdot MN \cdot OM$); тогда, послѣ соотвѣтствующихъ сокращеній, получимъ:

$$AM \cdot MN \cdot CK - KB \cdot MN \cdot OM = AM \cdot MO \cdot CK - OM^2 \cdot KB.$$

или, вынося общихъ множителей за скобку,

$$MN(AM \cdot CK - KB \cdot OM) = OM(AM \cdot CK - KB \cdot OM).$$

Сокращая на выраженіе, стоящее въ скобкахъ, получимъ:

$$MN = OM.$$

Разъясненіе. Въ этомъ паралогизмѣ допущена та же ошибка, что и въ предыдущемъ—мы сократили на нуль. Дѣйствительно, изъ подобія треугольниковъ AMO и CKB слѣдуетъ:

$$\frac{AM}{KB} = \frac{OM}{CK} \quad \text{или} \quad AM \cdot CK = KB \cdot OM,$$

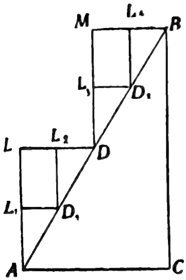
откуда

$$AM \cdot CK - KB \cdot OM = 0.$$

Во всякомъ прямоугольномъ треугольникѣ сумма катетовъ равна гипотенузѣ.

Раздѣлимъ гипотенузу AB прямоугольнаго треугольника ABC пополамъ и построимъ ломаную линію $ALDMB$ такъ, чтобы

AL и DM были параллельны BC, а LD и MB—параллельны AC. Тогда катетъ $BC=AL+DM$, а катетъ $AC=LD+MB$.



Черт. 16.

Сложивъ полученныя равенства почленно, найдемъ:

$$AC+BC=AL+LD+DM+MB,$$

т.-е. сумма катетовъ равна длинѣ ломаной линіи, состоящей въ данномъ случаѣ изъ четырехъ звеньевъ.

Далѣе раздѣлимъ AD и DB пополамъ и выполнимъ то же построеніе; послѣ этого убѣдимся, что

$$BC=AL_1+D_1L_2+DL_3+D_2L_4$$

и $AC=L_1D_1+L_2D+L_3D_2+L_4B.$

Сложивъ эти равенства почленно, мы снова убѣдимся, что сумма катетовъ равна длинѣ новой ломаной линіи.

Увеличивая число звеньевъ ломаной, мы каждое звено будемъ уменьшать, тогда какъ вся ломаная будетъ приближаться къ совпаденію съ гипотенузой и въ предѣлѣ, когда число звеньевъ будетъ безконечно велико, ломаная сольется съ гипотенузой; а если такъ, то въ предѣлѣ сумма катетовъ будетъ равна гипотенузѣ.

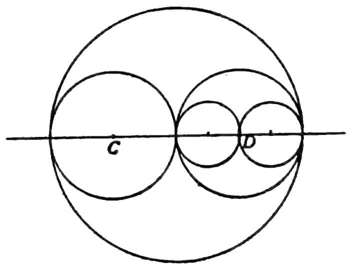
Разъясненіе. Такой выводъ полученъ нами благодаря неправильному переходу къ предѣлу—къ ломаной съ безконечно-большимъ числомъ звеньевъ. Мы брали рядъ различныхъ ломаныхъ, и хотя онѣ были составлены изъ различныхъ по числу и величинѣ звеньевъ, но сумма ихъ длинъ была постоянна и равна суммѣ катетовъ. Если же длина первой ломаной не равна гипотенузѣ, то и длина послѣдней не равна ей.

Разбирая болѣе строго этотъ паралогизмъ, вспомнимъ опредѣленіе термина «предѣлъ». Если имѣемъ двѣ величины, одну перемѣнную α, а другую постоянную A, то A тогда называется предѣломъ α, когда абсолютная разность $A—\alpha$ будетъ меньше всякой напередъ заданной величины. Итакъ, «предѣлъ» устанавливается только для перемѣнныхъ величинъ. У насъ же

длина ломаныхъ—величина постоянная, равная суммѣ катетовъ, а потому никакихъ предѣловъ для нея не существуетъ.

Окружность круга равна его діаметру.

Возьмемъ окружность радіуса R. Длина ея будетъ $2\pi R$. Раздѣлимъ діаметръ на 4 части и изъ точекъ C и D опишемъ окружности радіуса $\frac{R}{2}$. Тогда длина окружности будетъ $2 \cdot \frac{\pi R}{2} = \pi R$, а сумма ихъ длинъ $2\pi R$, т.-е. будетъ равна длинѣ первоначальной окружности. Если въ каждую изъ полученныхъ окружностей впишемъ еще по двѣ, радіуса $\frac{R}{4}$, то сумма длинъ всѣхъ окружностей будетъ равна $4 \cdot 2\pi \cdot \frac{R}{4} = 2\pi R$, т.-е. опять длинѣ первоначальной окружности. Къ тому же результату придемъ, уменьшая радіусъ вписываемыхъ окружностей въ 2, 4, 8, 16, 32 и т. д. разъ.



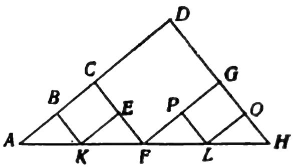
Черт. 17.

Но съ другой стороны эти окружности уменьшаются и въ предѣлѣ, когда радіусъ каждой изъ малыхъ окружностей обратится въ безконечно-малую величину, а сама такая окружность обратится въ точку, о суммѣ длинъ этихъ окружностей придется говорить, какъ о суммѣ безконечнаго числа точекъ. Предѣлъ этой суммы есть діаметръ, такъ какъ точки располагаются на немъ, слѣдовательно сумма длинъ малыхъ окружностей въ предѣлѣ будетъ равна діаметру, а если такъ, то длина всякой окружности равна ея діаметру.

Разъясненіе. Этотъ паралогизмъ также, какъ и предыдущій, основанъ на неправильномъ толкованіи термина «предѣлъ». Какъ мы знаемъ, это понятіе существуетъ только для перемѣнныхъ величинъ, а наша сумма длинъ только кажется перемѣнной, а на самомъ дѣлѣ она постоянна и равна длинѣ первоначальной окружности. Поэтому здѣсь дѣлать перехода къ предѣлу нельзя.

Въ любомъ треугольникѣ одна изъ сторонъ равна суммѣ двухъ другихъ.

Возьмемъ какой-нибудь треугольникъ ADH. Пусть точки C, G и F обозначаютъ средины его сторонъ. Изъ подобія треугольниковъ ADH, ACF и FGH заключаемъ, что



Черт. 18.

$$CF = \frac{DH}{2} = DG = GH$$

и $$FG = \frac{AD}{2} = CD = AC.$$

Поэтому сторона $AD = AC + FG$, а сторона $DH = GH + CF$.

Сложивъ почленно эти равенства, увидимъ, что сумма сторонъ $AD + DH$ равна длинѣ ломаной линіи $ACFGH$.

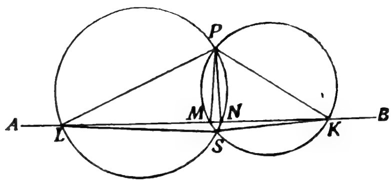
Раздѣливъ стороны AC, CF, FG, AF, FH и GH пополамъ, мы, по предыдущему, найдемъ, что сумма сторонъ AD и DH опять равна длинѣ вновь полученной ломаной линіи $ABKEFPLQH$. Увеличивая же число звеньевъ этой ломаной линіи, мы въ предѣлѣ получимъ ломаную линію, сливающуюся со стороной AH, т.-е. прямую, длина которой равна AH. Слѣдовательно, сумма сторонъ AD и DH будетъ равна сторонѣ AH, что и требовалось доказать.

Разъясненіе. Ошибка та же, что и въ предыдущемъ софизмѣ; она заключается въ неправильномъ переходѣ къ предѣлу; длина получаемыхъ ломаныхъ не есть величина перемѣнная, а постоянная.

Изъ точки, лежащей внѣ прямой, можно опустить на эту прямую два перпендикуляра.

Пусть изъ данной точки P требуется опустить на прямую AB перпендикуляръ. Покажемъ, что этихъ перпендикуляровъ можно опустить два.

Соединимъ P съ какими-либо точками L и K данной прямой. Прямыя LP и KP раздѣлимъ пополамъ и опишемъ изъ ихъ срединъ, какъ изъ центровъ, окружности, которыя пересѣкутъ прямую AB, положимъ, въ точкахъ M и N. Соединимъ эти точки съ точкой P. Тогда MP и NP будутъ перпендикулярами къ AB. Въ самомъ дѣлѣ, уголъ PNL, какъ опирающійся на полуокружность, есть прямой; то же можно сказать и относительно угла PMB.



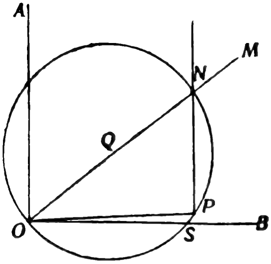
Черт. 19.

Разъясненіе. Полученный результатъ основанъ исключительно на невѣрности чертежа. На самомъ дѣлѣ точки пересѣченія съ прямой AB окружностей будутъ сливаться. Докажемъ это. Соединимъ S съ L и K. Углы PSL и PSK, какъ вписанные, опирающіеся на діаметръ, будутъ прямыми. Сумма ихъ равна $2d$, т.-е. линія LSK есть прямая.

Изъ точки, взятой на прямой, можно возставить къ этой прямой два перпендикуляра.

Возьмемъ прямой уголъ AOB и черезъ вершину прямого угла проведемъ произвольно прямую OM. Отложивъ на этой прямой произвольную величину ON, раздѣлимъ ее пополамъ и изъ найденной средины Q, какъ изъ центра, опишемъ окружность. Проведя изъ N прямую, параллельную AO, найдемъ нѣкоторую точку P, которую соединимъ съ O. Отрѣзокъ OP перпендикуляренъ къ NP, такъ какъ уголъ OPN опирается

на діаметръ ON окружности; слѣдовательно, онъ будетъ перпендикуляренъ и къ прямой AO, которая параллельна NP. Такимъ образомъ, къ прямой AO въ точкѣ O будетъ возставлено два перпендикуляра—OB и PO.

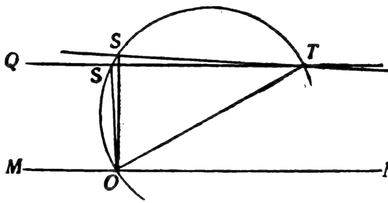


Черт. 20.

Разъясненіе. Причина ошибки—неправильный чертежъ. Точка P прямой NP необходимо должна совпасть съ точкой S. Только тогда линія NP, какъ перпендикулярная къ OB, будетъ параллельна AO.

Черезъ точку внѣ прямой можно провести къ этой прямой двѣ параллельныя.

Пусть дана прямая MN и точка T внѣ ея. Проведемъ прямую QT, параллельную MN. Затѣмъ, соединивъ T съ какой-нибудь точкой O прямой MN, раздѣлимъ полученный отрѣзокъ TO пополамъ и построимъ на немъ, какъ на діаметрѣ, окружность. Возставивъ изъ O перпендикуляръ OS до пересѣченія съ окружностью и соединивъ S съ T, получимъ прямую ST, которая, будучи перпендикулярна къ SO (какъ сторона вписаннаго, опирающагося на діаметръ, угла), въ то же время будетъ параллельна линіи MN. Слѣдовательно, черезъ точку T проведено двѣ линіи ST и QT, параллельныя MN.



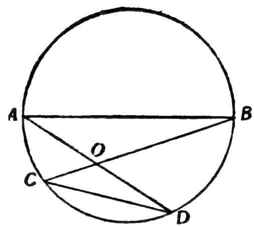
Черт. 21.

Разъясненіе. Въ данномъ случаѣ невѣренъ чертежъ. Точка S необходимо должна совпасть съ точкой S' прямой QT, такъ какъ уголъ $OS'T$—прямой, и $S'O$, какъ перпендикулярная къ одной изъ параллельныхъ—къ QT, должна быть перпендикулярна и

къ другой, т.-е. $S'O$ должна быть перпендикулярна къ MN. Если же такъ, то S совпадетъ съ S'.

Всякая хорда окружности равна ея діаметру.

Возьмемъ окружность и проведемъ діаметръ AB и хорду AD. Черезъ средину O этой хорды проведемъ прямую BC; соединивъ точки C и D, получимъ нѣкоторую хорду CD. Докажемъ, что $CD=AB$.



Черт. 22.

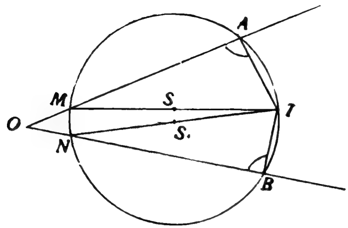
Разсмотримъ треугольники AOB и COD. Углы A и C, какъ вписанные, опирающіеся на одну и ту же дугу BD, равны между собою. По той же причинѣ равны углы B и D. Кромѣ того, сторона AO равна сторонѣ OD. Слѣдовательно, эти треугольники, какъ имѣющіе по равной сторонѣ и по два равныхъ угла, равны между собою. А если такъ, то противъ равныхъ угловъ лежатъ и равныя стороны. Слѣдовательно $CD=AB$.

Разъясненіе. Ошибка заключается въ томъ, что при доказательствѣ равенства треугольниковъ мы не обратили вниманія на положеніе сторонъ и угловъ. Въ треугольникѣ AOB сторона AO образуетъ углы A и AOB, а въ треугольникѣ COD, равная ей сторона OD, образуетъ углы D и COD. Углы OAB и COD равны, но углы A и D не равны. Слѣдовательно, въ нашихъ треугольникахъ по одному изъ прилежащихъ къ одной изъ сторонъ угловъ не равны. Если такъ, то треугольники не равны, и всѣ выводы, основанные на ихъ равенствѣ, являются ошибочными.

Всякая окружность имѣетъ два центра.

Возьмемъ произвольный уголъ AOB и возставимъ въ точкахъ A и B, взятыхъ на его сторонахъ, перпендикуляры AT и BT до пересѣченія ихъ въ точкѣ T. Черезъ полученныя три точки A, T и B проведемъ окружность (три точки вполнѣ опредѣляютъ ея положеніе). Пусть окружность пересѣчетъ прямыя OA и OB

въ точкахъ M и N. Тогда, соединивъ M и N съ T, найдемъ, что отрѣзки MT и NT будутъ діаметрами окружности, такъ какъ опирающіеся на нихъ вписанные углы MAT и NBT — прямые. А если такъ, то средины этихъ діаметровъ — точки S и S'—будутъ центрами проведенной окружности.



Черт. 23.

Разъясненіе. Ошибка произошла отъ невѣрнаго чертежа. Проведенная окружность необходимо должна пройти черезъ точки B, T, A и O, такъ какъ около четыреугольника $ATBO$ можно описать окружность. (Извѣстно, что всегда можно описать окружность около четыреугольника, сумма противоположныхъ угловъ котораго равна $2d$). Если же окружность пройдетъ черезъ точку O, то точки M и N сольются съ O, а потому точки S' и S совпадутъ.

Всѣ треугольники суть равнобедренные.

Возьмемъ какой-нибудь треугольникъ RST (неравнобедренный). Проведемъ биссектриссу угла S и въ срединѣ стороны RT возставимъ перпендикуляръ, который пересѣчется съ биссектриссой либо внутри треугольника, либо внѣ его. Пересѣчь же ее онъ долженъ, иначе треугольникъ RST будетъ равнобедреннымъ.

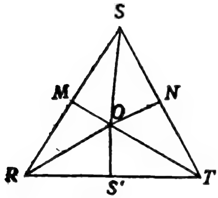
I. Пусть O есть точка пересѣченія перпендикуляра и биссектриссы. Соединимъ точку O съ вершинами R и T двухъ другихъ угловъ и опустимъ изъ нея перпендикуляры OM и ON на стороны RS и ST; тогда найдемъ, что треугольники MSO и OSN равны, какъ прямоугольные съ равными гипотенузами и прилежащими къ ней углами. Слѣдовательно,

$$MS=SN.$$

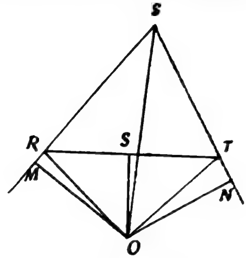
Такимъ же образомъ и треугольники RMO и TNO равны, какъ имѣющіе равные катеты ($MO=ON$) и гипотенузы, а потому

$$RM=NT.$$

Складывая полученныя равенства почленно, найдемъ, что



Черт. 24.



Черт. 25.

$RS=ST$, т.-е. треугольникъ RST есть равнобедренный.

II. Пусть O, точка пересѣченія перпендикуляра и биссектриссы, находится внѣ треугольника. Тогда, соединивъ ее съ вершинами R и T треугольника и опустивъ на стороны RS и ST перпендикуляры MO и NO, найдемъ, что треугольники MOS и NOS равны, откуда

$$MS=SN.$$

Изъ равенства же $\Delta\Delta$-ковъ MRO и NOT имѣемъ

$$MR=NT.$$

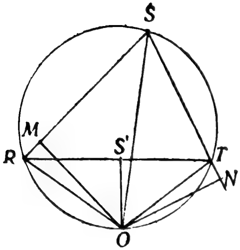
Вычитая почленно второе равенство изъ перваго, найдемъ

$$RS=ST,$$

т.-е. треугольникъ RST есть равнобедренный.

Разъясненіе. Опишемъ около взятаго треугольника окружность. Мы видимъ, что точка O пересѣченія перпендикуляра съ биссектриссой должна находиться на окружности въ срединѣ дуги ROT, такъ какъ биссектрисса и перпендикуляръ дѣлятъ дугу пополамъ. Слѣдовательно въ I случаѣ невѣренъ чертежъ

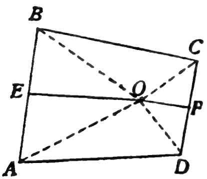
(точка O не можетъ находиться внутри треугольника). Разсматривая же треугольникъ STO, видимъ, что уголъ STO тупой, такъ какъ SO не проходитъ черезъ центръ окружности. (Если же SO проходитъ черезъ центръ, то треугольникъ RST равнобедренный). Если же уголъ STO тупой, то уголъ SRO будетъ острымъ, потому что дополняетъ его до $2d$. Поэтому точка N—основанiе перпендикуляра, опущеннаго изъ точки O—будетъ внѣ отрѣзка ST, а точка M—внутри отрѣзка RS. Мы же начертили обѣ эти точки внѣ соотвѣтствующихъ отрѣзковъ. Такимъ образомъ, и въ этомъ случаѣ ошибка произошла отъ не точности чертежа.



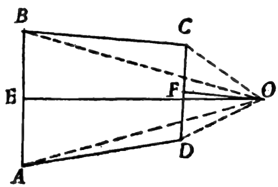
Черт. 26.

Тупой уголъ равенъ прямому *).

Возьмемъ четыреугольникъ $ABCD$, въ которомъ уголъ C прямой, уголъ D—тупой и противоположныя стороны BC и AD равны. Возставимъ изъ срединъ E и F сторонъ AB и CD перпендикуляры къ этимъ сторонамъ; такъ какъ эти перпендикуляры не могутъ быть другъ другу параллельны (AB непараллельна CD),



Черт. 27.



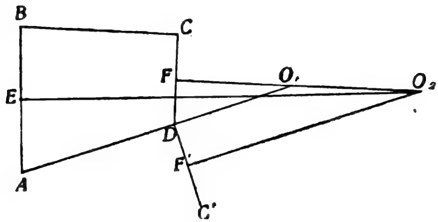
Черт. 28.

то они должны пересѣчься либо внутри четыреугольника, напр., въ точкѣ O (черт. 27), либо внѣ его (черт. 28). Соединивъ точку O (любой чертежъ) съ вершинами четыреугольника, найдемъ, что, треугольники AOD и BOC равны между собой (по

*) Софизмъ заимствованъ въ нѣсколько измѣненной редакцiи изъ книги Фурре—Геометр. головоломки и паралогизмы.

тремъ сторонамъ). Поэтому $\angle ADO = \angle BCO$. Прибавивъ къ каждому изъ этихъ равныхъ угловъ одинъ и тотъ же уголъ FDO, равный углу FCO (для перваго случая, черт. 27), или вычитая ихъ (для второго случая, черт. 28), получимъ, что $\angle ADC = \angle BCD$, т.-е. тупой уголъ равенъ прямому.

Разъясненіе. Ошибка заключается въ неправильности чертежа. Дѣло въ томъ, что точка O не можетъ быть ни внутри треугольника, ни между точками F и O_1 (черт. 29); она обязательно должна находиться гдѣ-нибудь за точкой O_1, т.-е. на продолженіи отрѣзка FO въ сторону точки O_1. Для того, чтобы показать это, отложимъ (черт. 29) длину $DC' = DC$ на перпенди-



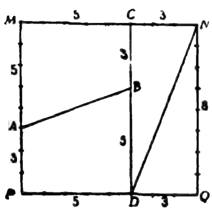
Черт. 29.

кулярѣ, возставленномъ изъ точки D къ прямой AD съ той стороны, гдѣ не находится BC; пусть точка O_2 будетъ точкой встрѣчи перпендикуляровъ, возставленныхъ къ прямымъ DC и DC' изъ ихъ срединъ F и F'. Точка O_2 есть центръ окружности, проходящей черезъ точки C, C' и D. Если повернуть фигуру BCD около точки O такъ, чтобы точка C пришла въ положеніе D, то треугольникъ BCD перейдетъ въ положеніе ADC' (по условію $AD = BC$). Такъ какъ точка B совпадаетъ съ точкой A, а отрѣзокъ OB съ отрѣзкомъ OA, то перпендикуляръ, возставленный къ прямой AB изъ ея средины E, пройдетъ черезъ точку O_2. Такимъ образомъ, точка пересѣченія перпендикуляровъ, возставленныхъ изъ срединъ сторонъ AB и CD, есть ни что иное, какъ точка O на чертежахъ 27 и 28. Такъ какъ точка O_2 находится на перпендикулярѣ, возставленномъ къ прямой DC' изъ ея средины T', то прямая O_2F' параллельна прямой AD и находится по ту сторону AD, гдѣ не находится точка C.

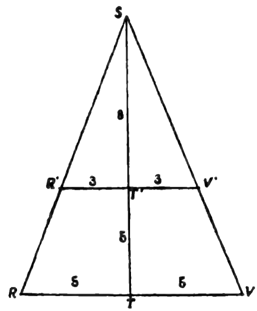
Вслѣдствіе этого оба наши чертежа неправильны, и разсматриваемые нами треугольники будутъ имѣть совершенно иное положеніе, чѣмъ то, какое имъ придано на чертежахъ 27 и 28.

Площадь квадрата не всегда равна квадрату стороны.

Возьмемъ квадратъ $MNPQ$ со стороной въ 8 линейныхъ единицъ. Разрѣжемъ его такъ, какъ показано на чертежѣ 30, и изъ полученныхъ частей сложимъ треугольникъ, изображенный на чертежѣ 31. Разсматривая его, найдемъ, что основаніе RV треугольника RSV равно 10 единицамъ, а высота $ST{=}13$ ед. Слѣ-



Черт. 30.



Черт. 31.

довательно, площадь треугольника $\triangle = \frac{10 \cdot 13}{2} = 65$ кв. единицамъ. Но такъ какъ квадратъ $MNPQ$ равновеликъ треугольнику RSV, то и площадь квадрата будетъ равна 65 кв. единицамъ, тогда какъ, на самомъ дѣлѣ, она равна $8^2{=}64$ кв. единицамъ.

Разъясненіе. Ошибка заключается въ томъ, что линіи $RR'S$ и $VV'S$ будутъ не прямыя, а ломаныя. Дѣйствительно, если бы линіи RS и VS были прямыми, то треугольники RST и $R'ST'$ были бы подобны, а потому мы имѣли бы пропорцію $\frac{RT}{R'T'} = \frac{ST}{ST'}$.

Подставивъ въ полученной пропорціи соотвѣтствующія значенія для входящихъ въ нее отрѣзковъ, получимъ нелѣпое

равенство: $\frac{5}{3}=\frac{13}{8}$. Слѣдовательно, написанной пропорціи быть не можетъ, а потому треугольники RST и $R'S'T'$ не будутъ подобны; иначе говоря, прямыя $R'S$ и RR' не будутъ служить продолженіемъ одна другой.

Кромѣ квадрата со стороною въ 8 единицъ, можно взять и другіе, напр. въ 21, 55 и т. д. единицъ. Чтобы найти эти числа, возьмемъ такъ называемый *рядъ Фибоначчи*: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 и т. д., гдѣ каждый послѣдующій членъ получается путемъ сложенія двухъ, непосредственно ему предшествующихъ. Одно изъ свойствъ этого ряда заключается въ томъ, что квадратъ каждаго члена отличается на ± 1 отъ произведенія предшествующаго и послѣдующаго членовъ. Такъ:

$$2^2-1.3=+1,$$
$$3^2-2.5=-1,$$
$$5^2-3.8=+1,$$
$$8^2-5.13=-1$$

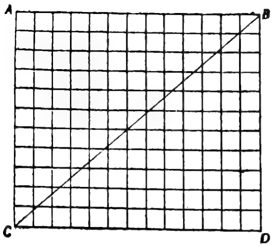
и т. д.

Выдѣливъ равенства, у которыхъ правая часть равна -1, мы и получимъ тѣ числа, которыя можно брать для нашихъ квадратовъ, чтобы наиболѣе удобно получить вышеприведенный софизмъ.

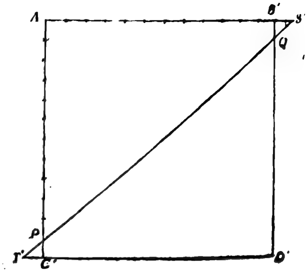
143=145.

Возьмемъ прямоугольникъ $ABDC$ со сторонами въ 13 и 11 единицъ и, проведя діагональ, сдвинемъ полученные треугольники по ихъ общей гипотенузѣ. Полученная фигура будетъ состоять изъ квадрата $A'B'C'D'$ со стороной въ 12 единицъ (слѣдовательно, съ площадью въ 144 кв. единицы) и двухъ треугольниковъ $R'S'Q$ и $C'T'P$ (площадь каждаго изъ которыхъ равна 0,5 кв. единицамъ). Площадь полученной нами фигуры будетъ равна 145 кв. единицамъ, тогда какъ площадь прямоугольника $ABCD$ равна 11 . 13=143 кв. единицамъ. Такимъ образомъ, 143=145.

Разъясненіе. Ошибка заключается въ томъ, что фигуру $A'B'D'C'$, которая не будетъ квадратомъ, мы приняли за квадратъ.



Черт. 32.



Черт. 33.

Дѣйствительно, сторона $A'B'=12$ ед., отрѣзокъ $QD'=11$ ед., но отрѣзокъ $B'Q$ не равенъ единицѣ. Вычислимъ его. Изъ треугольниковъ $PA'S'$ и $QB'S'$ имѣемъ:

$$\frac{B'Q}{A'P}=\frac{B'S'}{A'S'} \quad \text{или} \quad \frac{B'Q}{11}=\frac{1}{13},$$

$$\text{откуда} \quad B'Q=\frac{11}{13}.$$

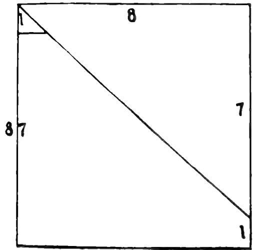
Поэтому сторона $B'D'=11\,\frac{11}{13}$ ед.

Слѣдовательно, площадь $A'B'C'D'$ равна $12 . 11\frac{11}{13}=142\frac{2}{13}$, площадь каждаго изъ треугольниковъ равна $\frac{1}{2} . \frac{11}{13} . 1=\frac{11}{26}$, а площадь всей полученной фигуры $142\,\frac{2}{13}+2 . \frac{11}{26}=143$ кв. единицамъ.

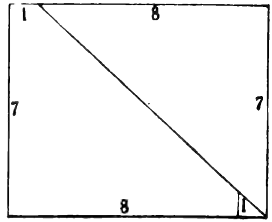
63=64.

Возьмемъ квадратъ со стороной въ 8 единицъ длины и разрѣжемъ его такъ, какъ показано на черт. 34. Затѣмъ сложимъ полученныя части такъ, какъ показано на черт. 35. Вычисляя

площадь квадрата, найдемъ ее равной 64 кв. единицамъ, тогда какъ площадь прямоугольника равна 63 кв. единицамъ.



Черт. 34.

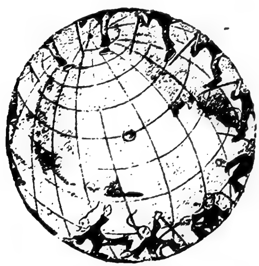


Черт. 35.

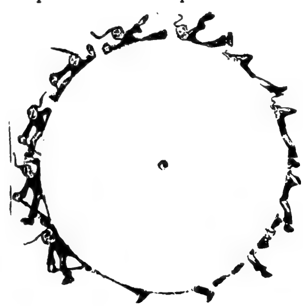
Разъясненіе. Сдѣлавъ несложныя вычисленія длинъ отрѣзковъ, аналогично тому, какъ мы поступали въ предыдущемъ софизмѣ (основываясь на подобіи входящихъ въ составъ фигуръ треугольниковъ), легко найдемъ ошибку.

Весьма любопытный парадоксъ *).

Въ заключеніе статьи о геометрическихъ паралогизмахъ



Черт. 36.



Черт. 37.

приведемъ слѣдующій весьма любопытный парадоксъ. Суще-

*) Приводимый парадоксъ помѣщенъ въ книгѣ Игнатьева «Въ царствѣ смекалки», стр. 36—39. Кн. 3-я. Изъ этой книги мы его и заимствуемъ съ нѣкоторыми измѣненіями.

ствуетъ игрушка, состоящая изъ двухъ картонныхъ листовъ, которые изображены на прилагаемыхъ фиг. 36 и 37. Наложимъ картонный кругъ, изображенный на фиг. 36, на часть, изображенную на фиг. 37, такъ, чтобы игрушка приняла видъ, изображенный на фиг. 38. Послѣдняя фигура, какъ видимъ, представляетъ собой земной шаръ, по краямъ котораго размѣщены въ различныхъ позахъ 13 воинственныхъ китайцевъ. Повернемъ теперь подвижный кругъ по направленію стрѣлки, не измѣняя положенія его центра, такъ, чтобы какой-либо изъ китайцевъ занялъ положеніе своего сосѣда. Послѣ этой манипуляціи мы получимъ то, что изображено на фиг. 39. Сосчитаемъ теперь, сколько китайцевъ на послѣдней фигурѣ? Ихъ будетъ уже 12. Куда же дѣвался одинъ китаецъ?

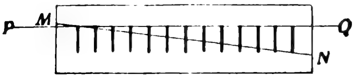
Сколько бы читатель ни ломалъ голову надъ причиной исчезновенія китайца, ему врядъ ли удалось бы разрѣшить эту загадку.

Черт. 38.

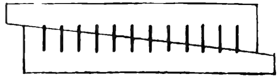
Черт. 39.

А между тѣмъ разгадка очень простая и нѣкоторымъ образомъ связана съ предыдущими софизмами. Для лучшаго выясненія только что приведеннаго парадокса представимъ себѣ, что на прямоугольномъ кускѣ картона начерчено 13 совершенно одинаковаго размѣра палочекъ, расположенныхъ на одинаковомъ разстояніи другъ отъ друга, какъ показано на черт. 40. Проведемъ прямую черезъ противоположные концы крайнихъ черточекъ и по этой прямой разрѣжемъ картонъ. Если теперь сдвинуть

обѣ полученныя половины такъ, какъ показано на черт. 41, то вмѣсто 13 палочекъ мы получимъ только 12. Дѣло въ томъ,



Черт. 40.

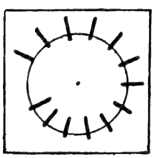


Черт. 41.

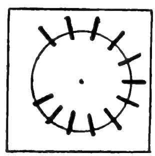
что вновь полученныя палочки длиннѣе прежнихъ, при чемъ разница въ длинѣ равна $\frac{1}{12}$ части прежней палочки, въ чемъ нетрудно убѣдиться изъ разсмотрѣнія прямыхъ MN (черт. 40) и PQ, образующихъ стороны угла, пересѣченныя рядомъ параллельныхъ прямыхъ, отстоящихъ другъ отъ друга на равныхъ разстояніяхъ. Вспомнивъ соотвѣтствующую теорему геометріи, легко замѣтить, что линія MN отсѣкаетъ отъ второй палочки $\frac{1}{12}$ часть ея длины, отъ третьей $\frac{2}{12}$ и т. д.

Сдвигая указаннымъ выше образомъ обѣ части картона, мы прикладываемъ отсѣченный отрѣзокъ каждой палочки къ соотвѣтствующей части предыдущей, вслѣдствіе чего каждая палочка удлиняется на $^1/_{12}$ своей первоначальной длины, а потому и всѣхъ палочекъ получается уже не 13, а 12.

Расположимъ теперь палочки по кругу такъ, какъ показано на черт. 42. Если вырѣзать внутренній кругъ и укрѣпить его въ центрѣ такъ, чтобы онъ могъ вращаться, то, повернувъ этотъ



Черт. 42.



Черт. 43.

кругъ по направленію движенія часовой стрѣлки такъ, чтобы

часть предыдущей палочки совпала съ послѣдующей, мы получимъ то, что изображено на черт. 43. Изъ разсмотрѣнія двухъ послѣднихъ чертежей легко убѣдиться, что и въ этомъ случаѣ, какъ и въ предыдущемъ, одна палочка исчезла, при чемъ причина этого исчезновенія весьма понятна.

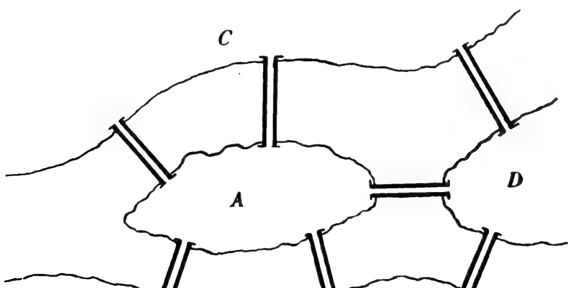
На только что разсбранномъ принципѣ и основанъ вышеприведенный парадоксъ съ исчезновеніемъ китайца.

Мосты и острова, вычерчиванiе фигуръ съ одного почерка, лабиринты.

Въ настоящей статьѣ разсмотримъ нѣсколько вопросовъ, относящихся къ такъ называемой геометрiи положенiя (Analysis situs*), а именно вопросы о мостахъ и островахъ, о вычерчиванiи фигуръ съ одного почерка и о лабиринтахъ.

Мосты и острова.

Въ 1759 году Эйлеръ предложилъ слѣдующую задачу: рѣка Пречель своими рукавами образуетъ въ Кенигсбергѣ островъ Кнейпгофъ. Черезъ оба рукава переброшено 7 мостовъ, распо-



Черт. 44.

ложенныхъ, какъ показано на чертежѣ 44. Предлагается рѣшить

*) См. статью «Analysis situs».

вопросъ, можно ли обойти всѣ эти мосты, побывавъ на каждомъ одинъ и только одинъ разъ. Конечно, это должно быть сдѣлано во время только одной прогулки.

Какъ оказывается, въ данномъ случаѣ этого сдѣлать нельзя; причины этого будутъ ясны изъ нижеприводимыхъ разсужденій.

Обозначимъ для большей простоты разсужденій мѣстности, соединенныя мостами, буквами A, B, C и D и будемъ ими записывать пройденный путь, располагая буквы въ томъ порядкѣ, въ какомъ будутъ проходиться мѣстности. Такъ, напр., если мы пройдемъ изъ A въ B, а затѣмъ въ D, то пройденный путь запишемъ въ видѣ ABD и т. п. Постараемся установить связь между числомъ буквъ, обозначающихъ пройденный путь, и числомъ пройденныхъ мостовъ. Пусть будетъ перейденъ одинъ изъ мостовъ, соединяющихъ A съ C; тогда пройденный путь обозначится въ видѣ AC. Далѣе перейдемъ изъ C въ D; тогда весь путь выразится послѣдовательностью буквъ ACD. Перейдя, наконецъ, черезъ третій мостъ изъ D въ B, получимъ путь $ACDB$ изъ четырехъ буквъ.

Запишемъ эти результаты въ таблицу слѣдующимъ образомъ:

Число пройденныхъ мостовъ.		Число буквъ пути.
1	AC	2
2	ACD	3
3	$ACDB$	4

и т. д.

Легко видѣть, что число буквъ, входящихъ въ выраженіе пути, будетъ на 1 больше числа пройденныхъ мостовъ, и если бы задача была возможна, то, совершивъ путь, мы должны были бы записать его восемью буквами, такъ какъ прошли бы по одному разу всѣ 7 мостовъ.

Въ какомъ же порядкѣ должны слѣдовать буквы? Мы видимъ изъ чертежа, что A соединено съ C и съ B двумя мостами; поэтому послѣдовательность AC или CA должна повториться два раза. То же самое надо сказать и про послѣдовательность буквъ A и B. Эти условія должны быть соблюдены, если задача возможна.

Но данный вопросъ легче разобрать, если учитывать не послѣдовательности отдѣльныхъ двухъ буквъ, а установить опредѣленное правило, при помощи котораго можно бы было рѣшить, сколько разъ должна входить каждая буква въ нашу послѣдовательность, выражающую весь путь. Возьмемъ мѣстность A. Изъ нея ведетъ пять мостовъ въ другія мѣстности. Пусть мы пойдемъ изъ A и пройдемъ одинъ мостъ. Тогда буква A войдетъ одинъ разъ (AC). Если мы пройдемъ три моста, то буква A войдетъ два раза ($ACAB$).

Пройдя пять мостовъ, получимъ выраженіе ($ACABAD$), въ которое A войдетъ три раза.

Запишемъ эти выводы въ нижеприводимую табличку и найдемъ связь между числами обоихъ столбцовъ.

Число пройденныхъ мостовъ.	Число повтореній буквы.
1	1
3	2
5	3
...	...
...	...
...	...
n	$\frac{n+1}{2}$

Мы видимъ, что связь эта проста. Числа второго столбца получимъ, если, прибавивъ къ соотвѣтствующему числу перваго столбца единицу, полученную сумму раздѣлимъ на два.

Итакъ, обобщивъ первые три вывода, заключаемъ, что если дѣло идетъ о мѣстности съ нечетнымъ числомъ мостовъ (такую мѣстность условимся называть *нечетной* мѣстностью), то, чтобы получить число повтореній соотвѣтствующей этой мѣстности буквы, надо къ числу мостовъ прибавить единицу и сумму раздѣлить на два. Легко убѣдиться, что на выводъ нисколько не вліяетъ, начинаемъ ли мы путь, направляясь изъ нечетной мѣстности или же направляясь въ нее. Замѣтимъ также, что

наше заключенie выведено при соблюденiи условiя—перейти каждый мостъ только по одному разу.

Примѣнимъ полученные выводы къ нашей задачѣ.

У насъ 7 мостовъ. Слѣдовательно, путь долженъ быть записанъ 8 буквами.

Въ мѣстности A пять мостовъ, поэтому

$$\text{число повторенiй } A=\frac{5+1}{2}=3.$$

Такимъ же образомъ найдемъ, что

$$\text{число повторенiй } B=\frac{3+1}{2}=2$$

$$\text{»} \qquad \text{»} \qquad C=\frac{3+1}{2}=2$$

$$\text{»} \qquad \text{»} \qquad D=\frac{3+1}{2}=2$$

Всего . . . 9 буквъ.

Итакъ, въ выраженiе нашего пути входитъ 9 буквъ, но, какъ мы видѣли, для возможности данной задачи ихъ должно быть 8. Отсюда мы и заключаемъ, что задача невозможна.

Воспользуемся полученными выводами для установленiя общей теорiи переходовъ, аналогичныхъ Эйлеровымъ. Возьмемъ какую-нибудь мѣстность, хотя бы A, и будемъ переходить черезъ четное число мостовъ. Разберемъ, сколько разъ должна повторяться въ данномъ случаѣ буква A. Отвѣтъ будетъ различенъ, въ зависимости отъ того, начнемъ ли мы путь изъ A или изъ другого какого-нибудь мѣста, напр. изъ C.

Пусть мы вышли изъ C и прошли черезъ A въ B. Мы прошли два моста и путь запишется CAB. Слѣдовательно, пройдя два моста, мы получимъ одно A. Вернувшись изъ B въ C опять-таки черезъ A, мы пройдемъ еще два моста, всего съ прежними четыре. Путь запишется въ видѣ ($CABAC$). Слѣдовательно, при четырехъ мостахъ, A входитъ два раза. Наша таблица въ данномъ случаѣ будетъ:

Число мостовъ.	Повторенiе буквъ
2	1
4	2
…	
…	…
$2n$	n

Мы видимъ, что соотношенiе между числами обоихъ столбцовъ очень просто. Числа второго столбца являются половинами соотвѣтствующихъ чиселъ перваго.

Нѣсколько сложнѣе получается зависимость, если начать путь изъ A. Пройдя изъ A въ C и обратно, получимъ путь (ACA). Прошли мы два моста и получили два повторенiя буквы. Затѣмъ пройдемъ въ B и обратно. Всего, съ пержними, пройдемъ четыре моста и получимъ путь ($ACABA$), т.-е. три повторенiя A. Вообразимъ, что область D также соединена съ A двумя мостами; пройдемъ въ D и обратно. Послѣ этого будетъ пройдено шесть мостовъ и путь запишется послѣдовательностью ($ACABADA$), т.-е. найдемъ четыре повторенiя A. Выпишемъ въ табличку въ первый столбецъ число мостовъ, а во второй—число повторенiй буквы A и постараемся отыскать зависимость между числами этихъ двухъ столбцовъ, какъ дѣлали и раньше. Общiй законъ не трудно будетъ подмѣтить.

Число мостовъ.	Число повторенiй буквъ.
2	2
4	3
6	4
…	…
…	…
…	…
n	$\frac{n}{2}+1$

Итакъ, число второго столбца получимъ, если соотвѣтствую-

щее ему число перваго раздѣлимъ на два и къ частному прибавимъ единицу.

Если назвать мѣстность съ четнымъ числомъ мостовъ *четною*, то полученные результаты можно формулировать слѣдующимъ образомъ.

Если начать путь изъ какой-нибудь области, направляясь въ четную, то число повтореній соотвѣтствующей ей буквы получимъ, раздѣливъ число мостовъ на два.

Если отправиться изъ самой четной мѣстности, то соотвѣтствующая ей буква въ выраженіи пути повторится число разъ, на единицу большее половины числа всѣхъ ея мостовъ.

Число же повтореній буквы, обозначающей нечетную мѣстность, равно числу мостовъ, сложенному съ единицей и затѣмъ уже раздѣленному на два.

При полномъ обходѣ любая изъ мѣстностей можетъ быть взята за исходную. Вслѣдствіе этого условимся, начиная нашъ путь, всегда направляться въ четную мѣстность; тогда для четной мѣстности число ея повтореній будетъ равно половинѣ числа ея мостовъ.

Теперь уже не трудно по числу мостовъ мѣстности узнавать число повтореній соотвѣтствующей ей буквы въ выраженіи полнаго пути. Выше мы видѣли, что обходъ возможенъ, когда число всѣхъ буквъ въ обозначеніи полнаго пути на единицу больше числа всѣхъ мостовъ. Теперь посмотримъ, какъ по общему виду мѣстностей заключить о возможности или невозможности задачи. Вернемся къ Эйлеровымъ мостамъ и запишемъ данныя въ слѣдующемъ порядкѣ.

Число мостовъ.	Число мостовъ	Число повтореній буквъ.
7	въ A—5	3
	» B—3	2
	» C—3	2
	» D—3	2
	14	9

Легко замѣтить, что сумма чиселъ второго столбца есть число, вдвое большее числа всѣхъ мостовъ, такъ какъ каждая единица выражаетъ конецъ моста, находящійся въ соотвѣтствующей мѣстности. Эта сумма обязательно должна быть четною, такъ какъ половина ея есть цѣлое число (число всѣхъ мостовъ). Но четною сумма можетъ быть только въ томъ случаѣ, если всѣ мѣстности четныя, или же, если нечетныя будутъ входить по парамъ. Отсюда заключаемъ, что задача возможна только въ случаѣ четнаго числа нечетныхъ мѣстностей или же при полномъ ихъ отсутствіи.

Посмотримъ теперь на сумму чиселъ третьяго столбца. Мы знаемъ, что она выражаетъ число всѣхъ буквъ въ записи нашего пути и что задача возможна тогда, и только тогда, когда число всѣхъ буквъ на единицу больше числа всѣхъ мостовъ. Легко замѣтить, что четныя мѣстности не увеличиваютъ общаго итога буквъ; число повтореній всѣхъ буквъ четныхъ мостовъ равно числу этихъ мостовъ, а число повтореній всѣхъ буквъ въ полной записи пути болѣе числа всѣхъ мостовъ; это есть слѣдствіе большаго или меньшаго числа нечетныхъ мѣстностей, такъ какъ только къ ихъ числу мостовъ прибавляется по единицѣ и затѣмъ уже сумма дѣлится на два. Такимъ образомъ, если у насъ есть двѣ нечетныхъ области, то онѣ и дадутъ какъ разъ ту лишнюю единицу, которой отличается число всѣхъ буквъ отъ числа всѣхъ мостовъ. Слѣдовательно, задача будетъ возможна, если нечетныхъ мѣстностей будетъ только двѣ. Если же ихъ будетъ 4, 6, 8 и т. д., то сумма чиселъ третьяго столбца—число буквъ въ записи пути—будетъ отличнымъ отъ числа всѣхъ мостовъ на 2, 3, 4 и т. д., т.-е. задача будетъ невозможна.

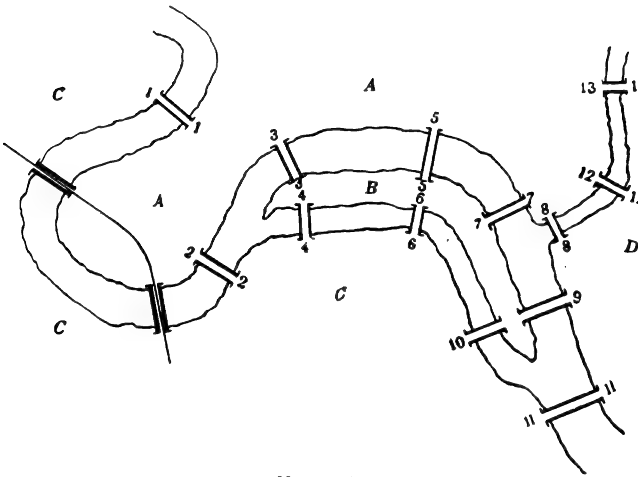
Такъ дѣло обстоитъ съ нечетными областями. Но откуда возьмется въ записи пути лишняя противъ числа мостовъ буква, если всѣ мѣстности четныя? На это легко отвѣтить, замѣтивъ, что среди всѣхъ четныхъ мѣстностей найдется одно, *изъ* которой мы начнемъ свой путь. Число повтореній ея буквы будетъ на единицу больше половины числа ея мостовъ. Слѣдовательно, она-то и даетъ эту лишнюю букву.

Изъ сказаннаго можно заключить, что задача возможна

тогда, когда всѣ мѣстности четныя, или же когда нечетныхъ будетъ только двѣ, а четныхъ, конечно, сколько угодно. Въ послѣднемъ случаѣ путь нужно начинать изъ *нечетной мѣстности*.

Разберемъ теперь нѣсколько примѣровъ. Совершимъ прогулки по мостамъ трехъ городовъ—Москвы, Петербурга и Парижа. Планъ рѣкъ этихъ городовъ будемъ давать болѣе или менѣе схематично.

На прилагаемомъ планѣ Москвы-рѣки и Яузы нанесено 15 мостовъ—Бородинскій (1), Крымскій (2), Каменные Большой (3) и Малый (4), Москворѣцкій (5), Чугунный (6), Устьин-



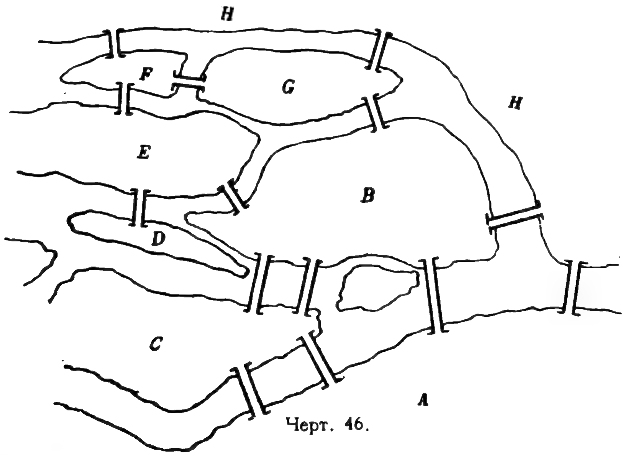
Черт. 45.

скіе (7 и 8), Краснохолмскіе (9 и 10), Новоспасскій (11), Яузскій (12), Высокій (13) и два желѣзнодорожныхъ моста окружной желѣзной дороги. Оставляя желѣзнодорожные мосты въ сторонѣ, посмотримъ, можно ли обойти всѣ остальные мосты, побывавъ на каждомъ только по одному разу?

Составляемъ таблицу.

Всѣхъ мостовъ	Число мостовъ	Число повтореній буквы.
13	въ A—8.	4
	» B—7.	4
	» C—6.	3
	» D—5.	3
	Всего	14

Такъ какъ 14—13=1, то прогулка наша возможна. Да это мы можемъ заключить и сразу, узнавъ, сколько у насъ нечетныхъ мѣстностей. У насъ ихъ какъ разъ двѣ—B и D (см. черт. 45). Обходъ можно совершить хотя бы такъ: $B_5A_1C_2A_3B_4C_6B_7A_8D_9B_{10}C_{11}D_{12}A_{13}D$. Здѣсь буква означаетъ мѣстность, откуда мы идемъ, а цифры—мостъ на чертежѣ, по которому переходимъ. Путь начатъ изъ нечетной мѣстности. Будетъ ли задача воз-



Черт. 46.

можна, если присоединить желѣзнодорожные мосты, предоставляемъ рѣшить читателю.

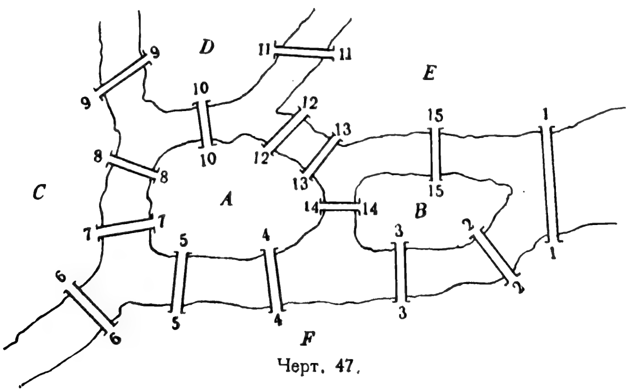
Перейдемъ теперь къ Петербургскимъ мостамъ. Здѣсь мы не будемъ брать всѣхъ мостовъ, а ограничимся только ведущими

черезъ Большую Неву, а также перекинутыми на большіе острова черезъ Малую Неву, Малую, Среднюю и Большую Невки. Всѣ остальные рѣки и каналы съ ихъ мостами мы оставляемъ въ сторонѣ, совѣтуя читателю самому составить задачу и разобраться въ возможности ея рѣшенія.

Взглянувъ на чертежъ, легко заключить, что прогулка наша по избраннымъ нами мостамъ невозможна, такъ какъ у насъ четыре нечетныхъ мѣстности.

Число мостовъ.	Число мостовъ	Число повтореній буквъ.
14	въ *A*—4.	2
	» *B*—6.	3
	» *C*—4.	2
	» *D*—1.	1
	» *E*—3.	2
	» *F*—3.	2
	« *G*—3.	2
	» *H*—4.	2
	Всего . . .	16

Мы видимъ, что буквъ 16, а мостовъ 14. Разность 16—14=2; теорія эту двойку намъ уже предсказывала—вѣдь у насъ четыре нечетныхъ мѣстности.



Черт. 47.

Разсмотримъ теперь мосты Парижа, одного изъ самыхъ важныхъ городовъ. Эти мосты перекинуты черезъ Сену; всѣ они представлены на прилагаемомъ чертежѣ. Можно ли ихъ обойти за одинъ разъ, не переходя черезъ каждый болѣе одного раза? Сосчитавъ мосты (чер. 47), составляемъ таблицу.

Число всѣхъ мостовъ.	Число мостовъ	Число повтореній буквъ.
15	въ A—8.	4
	» B—4.	2
	» C—4.	2
	» D—3.	2
	» E—5.	3
	» F—6.	3
	Всего . . .	16

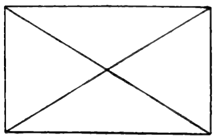
Отсюда заключаемъ, что задача возможна. Обходъ долженъ начаться изъ нечетной мѣстности и можетъ быть совершенъ хотя бы такъ:

$$E_1F_2B_3F_4A_5F_6C_7A_8C_9D_{10}A_{12}E_{13}A_{14}B_{15}E_{11}D.$$

Задачу на мосты можно разнообразить какъ угодно. Можно, напр., пройти любую квартиру, пройдя за одинъ разъ всѣ двери, но черезъ каждую только по одному разу. Въ этомъ случаѣ комнаты замѣнятъ мѣстности, двери—мосты. При разсмотрѣніи вопроса о лабиринтахъ мы къ этому примѣру еще вернемся. Подъ эту задачу можно подвести и такой случай. Пусть, напр., контрабандистъ задался цѣлью послѣдовательно перейти всѣ смежныя границы различныхъ странъ какого-нибудь континента непремѣнно по одному разу. Очевидно, страны соотвѣтствуютъ мѣстностямъ, границы—рукавамъ рѣки, черезъ которые перекинуто по одному мосту для каждой черты, общей двумъ сосѣднимъ сторонамъ. Такъ какъ у Швеціи, Испаніи и Даніи число границъ нечетное, то для европейскаго континента намѣреніе контрабандиста окажется неосуществимымъ.

Вычерчиванiе фигуръ съ одного почерка.

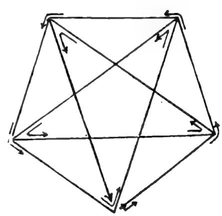
Перейдемъ теперь къ вопросу о вычерчиванiи фигуръ съ одного почерка. Всѣмъ, а если не всѣмъ, то многимъ, приходилось въ свое время ломать головы надъ «простенькими геометрическими фигурами», вычерчивая ихъ «сразу», и не было болѣе неудачной фигуры, какъ квадратъ съ его дiагоналями. Постараемся разобрать сейчасъ вопросъ о вычерчиванiи геометрическихъ фигуръ.



Черт. 48.

Возьмемъ прямоугольникъ съ его дiагоналями. Если вершины*) его будемъ разсматривать, какъ мѣстности, а всѣ линiи—какъ мосты, соединяющiе эти мѣстности, то задачу о вычерчиванiи этой фигуры съ одного почерка сведемъ на задачу о Кенигсбергскихъ мостахъ.

Въ самомъ дѣлѣ, вычерчивая ее однимъ почеркомъ, мы по каждой линiи пройдемъ по одному разу, а въ каждой точкѣ побываемъ нѣсколько разъ. Поэтому, все то, что сказано въ теорiи переходовъ по мостамъ, цѣликомъ относится и сюда, съ замѣною только слова «мѣстность» словомъ—«точка».



Черт. 49.

Поэтому фигуры можно вычертить съ одного почерка въ случаѣ, если всѣ точки ея будутъ четными или если среди четныхъ будетъ только двѣ нечетныхъ. Въ нашемъ прямоугольникѣ нечетныхъ точекъ 4, такъ какъ всѣ вершины нечетны, а потому задача невозможна.

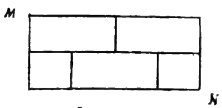
Возьмемъ теперь какой-нибудь многоугольникъ, напр., n-угольникъ. Проведемъ въ немъ всѣ дiагонали. Тогда, какъ

---

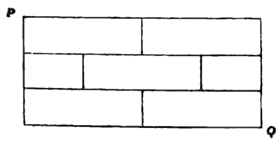
*) Точками пересѣченiя дiагоналей всѣхъ фигуръ можемъ пренебрегать, такъ какъ онѣ всегда будутъ четныя. Кратность каждой равна $2n$, гдѣ n число пересѣкающихся въ этой точкѣ дiагоналей.

извѣстно, въ каждой вершинѣ будетъ сходиться n—3 діагоналей. Если же принять въ расчетъ и стороны, то найдемъ, что въ каждой вершинѣ всего будетъ пересѣкаться n—1 прямыхъ. Поэтому, если многоугольникъ съ четнымъ числомъ сторонъ (n—четное), то каждая вершина будетъ нечетной точкой ($n+1$ —число нечетное) и наоборотъ. Слѣдовательно вычертить однимъ почеркомъ многоугольникъ съ его діагоналями, если n-четное число, нельзя, и, наоборотъ, можно, если n—нечетное число. Мы видѣли, что прямоугольникъ ($n=4$) съ діагоналями не вычерчивается; если же взять пятиугольникъ, то онъ легко вычертится.

Въ геометріи положенія доказывается, что въ замкнутой фигурѣ можетъ быть только четное число нечетныхъ точекъ, а потому легко сообразить, сколькими непрерывными линіями можетъ быть вычерчена фигура, если она не вычерчивается съ

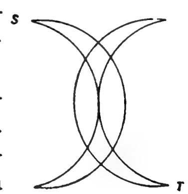


Черт. 50.



Черт. 51.

одного почерка. Такъ какъ двѣ нечетныя точки не препятствуютъ нашему вычерчиванію, то число непрерывныхъ линій будетъ вдвое меньше числа нечетныхъ точекъ. Такъ, напр., фигура MN, въ которой 8 нечетныхъ точекъ, можетъ быть вычерчена 4-мя «почерками», фигура же PQ съ 12-ю нечетными точками только 6-го непрерывными линіями (черт. 50 и 51).

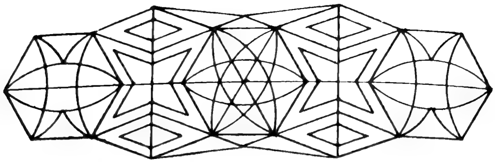


Черт. 52.

Существуетъ преданіе, что Магометъ чертилъ съ одного почерка остріемъ палаша свою подпись, представляющую два скрещенныхъ полумѣсяца, какъ это представлено на фигурѣ ST. На этой фигурѣ встрѣчаются лишь точки, въ которыхъ пересѣкается четное число линій, поэтому черченіе ея съ одного почерка не представитъ никакихъ затрудненій.

Рис. 53 представляетъ собою чертежъ, принадлежащій Мо-

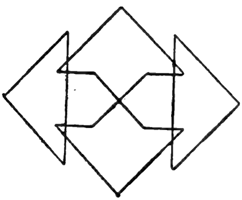
рицу Кантору, профессору Гейдельбергскаго университета. Сложность этого рисунка сразу бросается въ глаза, въ особен-



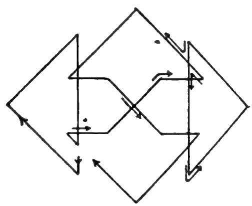
Черт. 53.

ности, если сравнить его съ квадратомъ и его діагоналями; но несмотря на это, онъ можетъ быть вычерченъ непрерывнымъ почеркомъ, такъ какъ заключаетъ въ себѣ только двѣ точки A и Z съ нечетнымъ числомъ линій, въ нихъ пересѣкающихся.

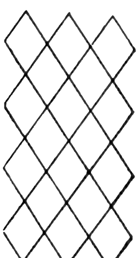
Ниже помѣщено рядъ интересныхъ фигуръ, вычерчиваемыхъ съ одного почерка. Рядомъ съ каждой фигурой дано и ея рѣшеніе.



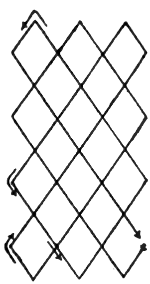
Черт. 54.



Черт. 55.



Черт. 56.



Черт. 57.

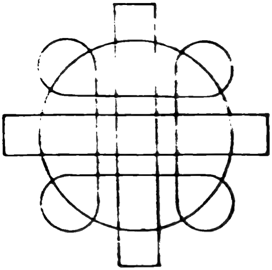


Рис. 58.

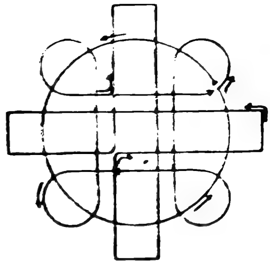


Рис. 59.

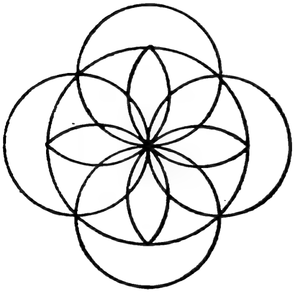


Рис. 60.

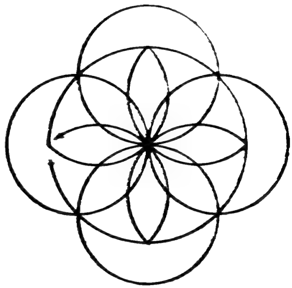


Рис. 61.

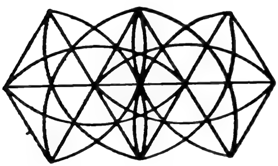


Рис. 62.

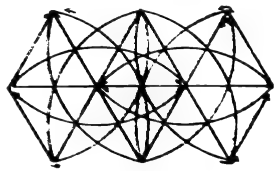


Рис. 63.

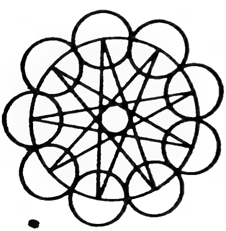


Рис. 64.

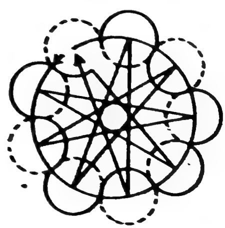


Рис. 65.

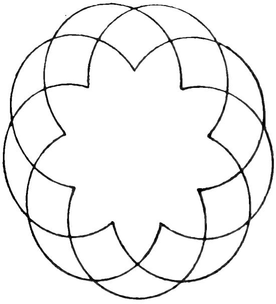


Рис. 66.

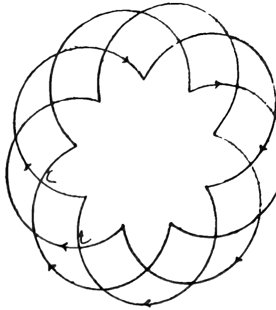


Рис. 67.

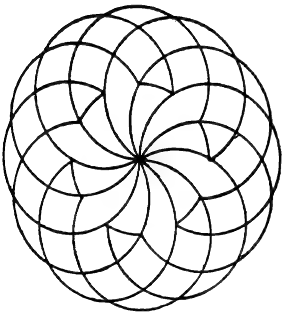


Рис. 68.

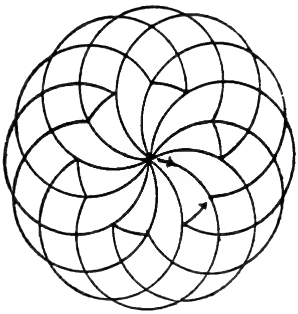


Рис. 69.

Лабиринты.

Теперь перейдемъ къ вопросу о лабиринтахъ. Подъ этимъ словомъ подразумѣваются такіе ходы (искусственные или естественные), попавъ въ которые, нельзя въ нихъ не заблудиться и, слѣдовательно, нельзя найти изъ нихъ выхода. Такъ думали древніе. Въ ихъ жизни лабиринты играли огромную роль. Да это и понятно. Въ тѣ времена, когда страны подвергались разгрому и расхищенію, умъ людей невольно долженъ былъ направиться на изысканіе средствъ спасти самое дорогое свое сокровище. Люди видѣли безпомощность въ этомъ отношеніи физической силы и пускались на хитрости. А такъ какъ лабиринтъ по ихъ мнѣнію былъ неразрѣшимъ (т.-е. безъ плана въ рукахъ, нельзя было прійти въ какую-нибудь опредѣленную его точку), то, окруживъ

лабиринтомъ свое сокровище, древнiе вполнѣ были увѣрены въ его безопасности. Такъ, напр., египтяне въ своихъ пирамидахъ окружали гробъ фараона лабиринтомъ; по тому же типу лабиринтовъ воздвигались и многiя другiя постройки, напр. храмы, гробницы и т. п. Предполагаютъ, что и слово «лабиринтъ» есть передѣланное греками египетское слово, означавшее «подземный ходъ».

Далѣе, на зарѣ христiанской эры въ такихъ лабиринтахъ спасались первые христiане. Мы имѣемъ въ виду катакомбы—подземныя гробницы, въ которыхъ, дѣйствительно, ничего не стоило заблудиться и умереть отъ голода и жажды. Современные рудники также могутъ служить примѣромъ лабиринтовъ.

Древнiе съ весьма большимъ уваженiемъ относились къ лабиринтамъ и часто вплетали ихъ въ свои легенды. Особенно популярна, напр., легенда о Тезеѣ, греческомъ героѣ, который попалъ въ лабиринтъ на островѣ Критѣ. По желанiю царя этого острова—Миноса, искуснымъ строителемъ Дедаломъ былъ воздвигнутъ замѣчательный лабиринтъ. Въ немъ обитало чудовище—Минотавръ. Аѳиняне принуждены были платить этому чудовищу дань, посылая ежегодно семь дѣвушекъ и семь юношей, которыхъ чудовище съ аппетитомъ пожирало. Обыкновенно обреченныхъ на съѣденiе вводили въ лабиринтъ; они тамъ и бродили, пока не попадали на завтракъ чудовищу. Тезей рѣшилъ убить чудовище. Несмотря на всю свою храбрость и мужество онъ погибъ бы въ стѣнахъ ужаснаго строенiя заблудившись, если бы его не спасла дочь Миноса—Арiадна. Она дала ему клубокъ нитокъ, съ помощью которыхъ Тезей могъ выйти обратно, такъ какъ во время пути онъ постепенно разматывалъ клубокъ.

Но не только древнiе увлекались лабиринтами. Въ среднiе вѣка также занимались ихъ конструированiемъ, хотя назначенiе лабиринтовъ было уже другое. Они какъ бы являлись символомъ запутанности жизненнаго пути и эмблемой человѣческихъ ошибокъ. До насъ дошло много тканей, употреблявшихся на одѣянiе христiанскихъ царей. Ткани эти часто украшены рисунками лабиринтовъ. На полахъ церквей, на каменныхъ плитахъ и т. п. предметахъ также находились изображенiя лабиринтовъ.

Впрочемъ, лабиринты здѣсь были просто на-просто очень длинными и извилистыми путями, пройти по которымъ часто назначалось въ видѣ наказанія.

Особенное развитіе лабиринты получили на западѣ. Но и у насъ, еще теперь, во многихъ монастыряхъ и лаврахъ можно найти діаграммы довольно сложныхъ лабиринтовъ.

Въ послѣдующіе вѣка лабиринты совершенно утратили свое символическое значеніе и постепенно сдѣлались предметомъ простыхъ развлеченій. Теперь по плану лабиринтовъ разбиваются аллеи парковъ, дорожки цвѣтниковъ, садовъ и т. п. Трудно бываетъ найти въ такихъ садахъ путь къ центру и легко заблудиться.

Обратимся теперь къ рѣшенію задачи о лабиринтахъ и постараемся показать, что неразрѣшимыхъ лабиринтовъ нѣтъ.

Прежде всего покажемъ, что дѣйствительно пройдя *конечное* число разъ по всему лабиринту, мы обязательно придемъ къ выходу, а затѣмъ укажемъ правила, какъ лучше всего это сдѣлать.

Вернемся къ нашему примѣру, иллюстрирующую задачу о Кенигсбергскихъ мостахъ—къ обходу квартиры съ условіемъ пройти всѣ двери, проходя черезъ каждую только одинъ разъ. Мы видѣли, что это возможно или когда всѣ комнаты имѣютъ четное число дверей, или когда комнатъ съ нечетнымъ числомъ дверей только двѣ. Не трудно видѣть, что лабиринтъ есть такая же квартира, но только съ очень большимъ числомъ комнатъ-*перекрестковъ* и что каждая дверь этой квартиры растянута въ длинный *коридоръ*. Отсюда уже легко понять, что обойти весь лабиринтъ, пройдя по каждому коридору только одинъ разъ, не всегда возможно, при чемъ невозможно тогда, когда у него болѣе двухъ перекрестковъ, соединенныхъ съ другими нечетнымъ числомъ коридоровъ.

Но что получится, если мы рѣшимъ пройти по каждому коридору два и только два раза? Это, какъ легко уяснить, равносильно тому, что у насъ стало вдвое болѣе ходовъ и по каждому изъ нихъ намъ надо пройти по одному разу. А разъ это такъ, то всѣ нечетные перекрестки превратятся въ четные и, слѣдовательно, задача—обойти весь лабиринтъ, пройдя по каждому коридору не болѣе двухъ разъ,—вполнѣ возможна; если въ

каждомъ пунктѣ лабиринта мы можемъ побывать, то не найти изъ него выхода нельзя. Изъ всякаго лабиринта можно всегда выйти, пройдя по его коридорамъ не болѣе двухъ разъ, при чемъ на практикѣ обыкновенно наталкиваются на выходъ раньше, чѣмъ будутъ пройдены всѣ коридоры по два раза.

Остается рѣшить вопросъ, какъ слѣдуетъ итти, чтобы наиболѣе цѣлесообразнымъ образомъ найти выходъ изъ лабиринта. На это даетъ отвѣтъ французскій инженеръ *Тремо*, указавшій три правила для рѣшенія лабиринтовъ.

Правило первое. Выйдя изъ начальнаго пункта или изъ какого-либо перекрестка, слѣдуетъ итти по произвольно выбранному пути до тѣхъ поръ, пока не придемъ къ глухому концу коридора или новому перекрестку; въ первомъ случаѣ, конечно, придется возвратиться назадъ, отмѣтивъ это на стѣнѣ или на полу двумя чертами, такъ какъ этотъ путь пройденъ два раза—впередъ и назадъ; во второмъ же—итти дальше по какому-нибудь произвольно взятому направленію, отмѣчая каждый разъ входъ въ перекрестокъ и выходъ изъ него.

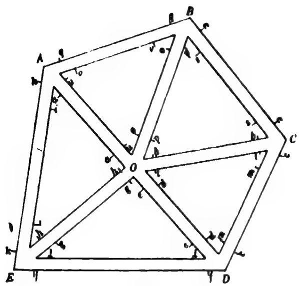
Это правило примѣняютъ всякій разъ, когда на пути встрѣчается неизвѣстный перекрестокъ. Но, очевидно, послѣ нѣсколькихъ переходовъ, намъ, по необходимости, долженъ будетъ встрѣтиться снова такой перекрестокъ, черезъ который мы уже проходили. При этомъ возможны два случая, смотря по тому, подходимъ ли мы къ перекрестку по пути уже пройденному, или же идемъ къ нему по новому пути. Сообразно съ этимъ примѣняется одно изъ нижеслѣдующихъ правилъ.

Второе правило. Приблизившись къ перекрестку по новому пути, слѣдуетъ вернуться назадъ, отмѣтивъ прибытіе на перекрестокъ и выходъ изъ него двумя чертами.

Третье правило. Когда мы подойдемъ къ перекрестку путемъ уже пройденнымъ, слѣдуетъ направиться по новому пути, если онъ существуетъ; а если его нѣтъ, то по пути, пройденному только одинъ разъ.

Слѣдуя этимъ тремъ правиламъ, всегда возможно выйти изъ самаго запутаннаго лабиринта, пройдя по каждому коридору его по два раза. Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, во избѣжаніи излишней запутанности, лабиринтъ *ABCDE* про-

стѣйшей формы съ центральнымъ перекресткомъ O (черт. 70). Пусть A будетъ точка, съ которой начинается обходъ. Не задаваясь никакимъ планомъ, мы проходимъ AO, OC, CD, DO, отмѣчая приближенiе къ перекресткамъ и выходъ изъ нихъ чертами *aa*, *bb*, *cc*, *dd* и съ послѣднимъ переходомъ приближаемся къ перекрестку, уже пройденному. Поэтому, въ силу правила второго, возвращаемся тѣмъ же коридоромъ, отмѣчая свое возвращенiе вторичными чертами *ee*.



Черт. 70.

Придя къ перекрестку D, мы будемъ имѣть случай приближенiя къ знакомому перекрестку по пути, проходимому вторично, а потому, слѣдуя правилу 3-му, должны будемъ итти по DE, отмѣтивъ выходъ съ перекрестка D и приближенiе къ E чертами *xx*. Далѣе идемъ по EO, примѣняя 1-е правило, т.-е. ставя отмѣтки *gg*.

Возвращаемся по тому же пути и, поставивъ, въ силу правила второго, въ надлежащихъ мѣстахъ черты *hh*, продолжаемъ обходъ, согласно правилу третьему, по EA, сдѣлавъ отмѣтки *kk*.

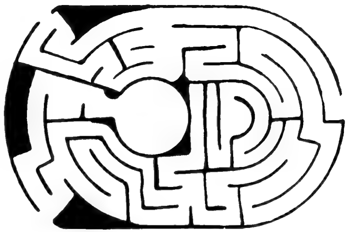
Изъ сказаннаго ясно, какимъ образомъ примѣняются указанныя правила при обходѣ лабиринта. Условимся для краткости обозначать нашъ путь послѣдовательностью буквъ въ томъ порядкѣ, въ какомъ мы ихъ проходимъ, при чемъ послѣ обозначенiя каждаго корридора рядомъ съ обозначающими его буквами, условимся помѣщать соотвѣтствующiя малыя буквы, обозначающiя наносимыя черточки. Тогда остальной путь можно будетъ записать слѣдующимъ образомъ:

$$AE(ii)ED(ll)DE(mm)CB(nn)BO(oo)OB(pp)BA(yy)AB(vv)BC(ss)$$
$$CO(tt)OA(uu).$$

Такимъ образомъ въ концѣ-концовъ окажется, что, обойдя всѣ проходы по два раза, мы снова вступимъ на перекрестокъ A, съ котораго вышли.

Въ болѣе сложномъ примѣрѣ, полагаемъ, нѣтъ нужды, такъ какъ ходъ рѣшенія задачи останется тотъ же.

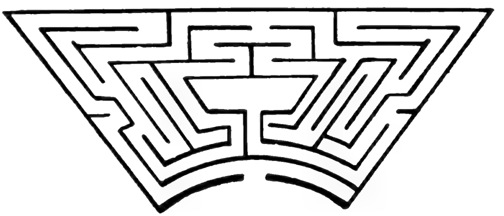
Предлагаемъ читателю поупражняться въ этихъ правилахъ, разрѣшивъ какой-либо изъ прилагаемыхъ ниже лабиринтовъ. Для этого совѣтуемъ взять листъ тонкаго картона и, вырѣзавъ въ немъ отверстіе, сквозь которое былъ бы виденъ одинъ ходъ, прикрыть этимъ листомъ планъ лабиринта. Двигая отверстіе по коридору лабиринта и отмѣчая пути по правиламъ *Тремо*, легко можно найти выходъ.



Черт. 71.

На рис. 71 представленъ Лабиринтъ въ южномъ Кессингтонѣ, устроенный Королевскимъ обществомъ садоводства, нынѣ не существуетъ.

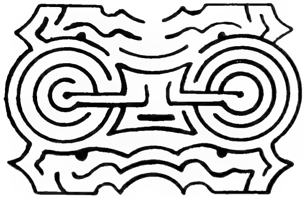
Рис. 72 представляетъ Лабиринтъ въ садахъ дворца Хемитонъ-Коуртъ. Онъ считается однимъ изъ красивѣйшихъ въ Англіи. Этотъ лабиринтъ былъ устроенъ въ первую половину царствованія Вильгельма III, хотя имѣется предположеніе, что онъ существовалъ тамъ со времени Генриха VIII. Способъ пройти къ центру и выйти изъ сада состоялъ въ томъ, чтобы, вступивъ въ лабиринтъ, съ перваго же шага и до конца касаться изгороди правой рукой.



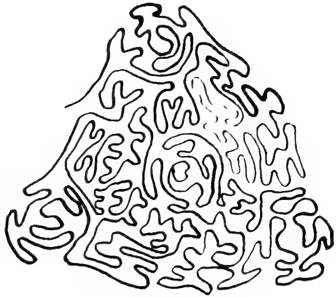
Черт. 72.

Рис. 76 Представляетъ Лабиринтъ въ Шартрскомъ соборѣ. Онъ имѣетъ 40 футовъ въ поперечникѣ; по этому лабиринту кающіеся совершали путь, длинный и сложный, выполняя возложенную на нихъ эпитимію.

Рис. 74 представляетъ Лабиринтъ въ графствѣ Дорсетъ. Онъ состоялъ изъ холмиковъ, около фута высоты и занималъ около акра площади земли.



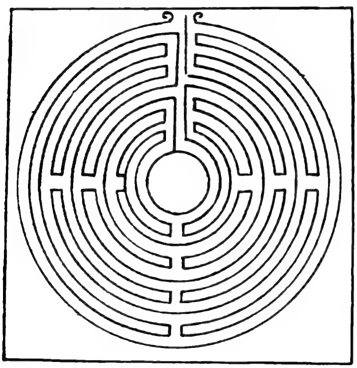
Черт. 73.



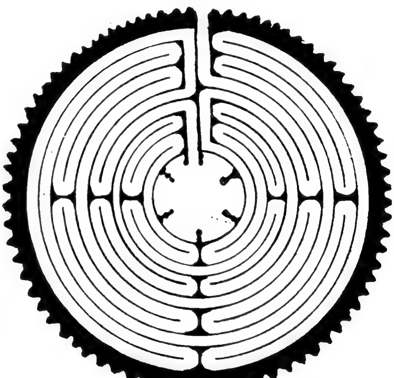
Черт. 74.

Въ 1730 году онъ былъ запаханъ.

На рис. 73 приведенъ образецъ нѣмецкаго лабиринта. Онъ



Черт. 75.



Черт. 76.

изященъ и не замысловатъ.

На рисункѣ 75 приведенъ лабиринтъ, находящійся на одной изъ плитъ пола въ каѳедральномъ соборѣ въ Луккѣ. Поперечникъ его равенъ $19^1/_2$ дюймовъ.

Ходъ шахматнаго коня*).

Какъ извѣстно, обыкновенная шахматная доска состоитъ изъ 64 клѣтокъ, на которыхъ разставлены соотвѣтствующимъ образомъ 32 шахматныя фигуры. Вопросъ относительно различнаго расположенія королевъ на шахматной доскѣ, относящійся къ теоріи соединеній, мы уже разсмотрѣли во II томѣ хрестоматіи. Обратимся здѣсь къ изслѣдованію вопроса о ходѣ шахматнаго коня, такъ какъ этотъ вопросъ непосредственно можетъ быть отнесенъ къ геометріи положенія.

Задача на ходъ шахматнаго коня занимала еще средневѣковыхъ шахматистовъ и состояла въ томъ, что требовалось произвольными, но непрерывными ходами одного коня взять всѣ 32 шахматныя фигуры, расположенныя въ любомъ порядкѣ на одной изъ половинъ шахматной доски. Такъ какъ по правиламъ шахматной игры для того, чтобы взять одной фигурой другую, надо стать на ея мѣсто, то понятно, что въ данной задачѣ конь долженъ послѣдовательно пройти всѣ 32 клѣтки той половины доски, на которой находятся фигуры, становясь на каждую отдѣльную клѣтку только одинъ разъ, чтобы взять фигуру, и не заходя на вторую половину доски.

Задача, извѣстная подъ названіемъ *хода коня* въ настоящее время нѣсколько отличается отъ вышеуказанной; она заключается въ томъ, что требуется обойти конемъ всѣ 64 клѣтки шахматной доски такъ, чтобы на каждой клѣткѣ конь былъ по-

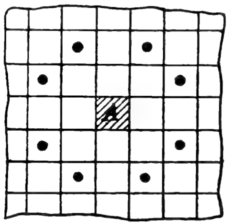
---

*) Статья составлена главнымъ образомъ по книгѣ Аренса—Математическія развлеченія и игры.

слѣдовательно только одинъ разъ и послѣднимъ ходомъ возвратился бы въ ту клѣтку, изъ которой вышелъ вначалѣ.

Несмотря на то, что въ настоящее время эта задача является весьма распространенной, въ срединѣ XVIII вѣка она была еще очень мало извѣстна. Первый, кто занялся научнымъ рѣшеніемъ этой задачи, былъ знаменитый Эйлеръ, которому ее предложили въ одномъ обществѣ. Въ дальнѣйшемъ, вѣроятно, подъ вліяніемъ работъ Эйлера въ этомъ направленіи, задача о ходѣ шахматнаго коня получила весьма широкое распространеніе.

Какъ извѣстно, ходъ шахматнаго коня заключается въ томъ, что конь можетъ передвигаться изъ своей клѣтки или на 2 клѣтки по горизонтальному направленію въ одну сторону и затѣмъ на 1 клѣтку въ вертикальномъ направленіи; или же—сначала на 2 клѣтки въ вертикальномъ направленіи и затѣмъ на 1 клѣтку въ горизонтальномъ. На прилагаемомъ рисункѣ указаны точками тѣ клѣтки, на которыя можетъ переместиться конь изъ своего первоначальнаго положенія, а именно—изъ заштрихованной клѣтки, обозначенной буквой А. Клѣтка, на которой первоначально находился конь и клѣтка на которую этотъ конь можетъ быть перемѣщенъ указаннымъ способомъ называются связанными между собой ходомъ коня. Само собой разумѣется, что на рисункѣ изображена только часть шахматной доски, и, если конь будетъ находиться ближе къ краю доски, то для него могутъ быть возможны уже не 8 различныхъ ходовъ, а только 6, 4, 3 или даже 2 хода, если онъ будетъ занимать одну изъ угловыхъ клѣтокъ. Здѣсь важно замѣтить, что клѣтки, связанныя между собою ходомъ коня, обязательно различны по цвѣту, т.-е. если конь первоначально находился на бѣлой клѣткѣ, то онъ можетъ переместиться только на черную и обратно. Обыкновенно, при разсмотрѣніи ходовъ шахматнаго коня клѣтку, на которой конь находился первоначально, называютъ *начальной* клѣткой, и послѣднюю—*заключительной*,—обѣ же вмѣстѣ—*конечными*. Если начальная и заключительная клѣтки соединены между собой



Черт. 77.

ходомъ коня, то весь путь, по которому конь обошелъ всѣ 64 клѣтки шахматной доски, называется *замкнутымъ;* если же конечныя точки не соединены между собой ходомъ коня, то — *незамкнутымъ*. Разсмотримъ здѣсь нѣкоторыя рѣшенія интересующей насъ задачи.

Начнемъ съ того примѣра, которымъ конь сначала проходитъ одну половину шахматной доски, а затѣмъ переходитъ на вторую. На черт. 78 приведено одно изъ рѣшеній этой задачи, при чемъ числа, стоящія въ клѣткахъ, указываютъ порядокъ, въ которомъ конь послѣдовательно проходитъ всѣ клѣтки; при этомъ, какъ видимъ, онъ сначала обходитъ нижнюю половину доски, а потомъ верхнюю. Изъ разсмотрѣнія этого рѣшенія мы можемъ прійти къ слѣдующему интересному результату. Такъ какъ начальная и заключительная клѣтки связаны между собой ходомъ коня, то весь путь коня является замкнутымъ, а слѣдовательно,—поставивъ коня на любую изъ клѣтокъ шахматной доски, мы можемъ обойти послѣдовательно всѣ клѣтки въ порядкѣ, указанномъ на рисункѣ, и вернуться въ начальную клѣтку. Дѣйствительно, если мы, напримѣръ, желаемъ выйти изъ угловой клѣтки, обозначенной цифрой *50*, то мы должны послѣдовательно переставлять коня на клѣтки съ цифрами *51*, *52* и т. д. до клѣтки съ цифрой *64*, затѣмъ сдѣлать ходъ на клѣтку съ цифрой *1* и, наконецъ, обойти послѣдовательно всѣ клѣтки, перенумерованныя отъ *1* до *50*. Кромѣ того, такъ какъ каждый замкнутый путь коня можетъ быть пройденъ по двумъ взаимно противоположнымъ направленіямъ, т.-е. въ порядкѣ возрастанія чиселъ отъ *1* до *64* или въ порядкѣ ихъ послѣдовательнаго убыванія, то при любой начальной клѣткѣ мы можемъ пройти конемъ двумя различными способами.

37	62	43	56	35	60	41	50
44	55	36	61	42	49	34	59
63	38	53	46	57	40	51	48
54	45	64	39	52	47	58	33
1	26	15	20	7	32	13	22
16	19	8	25	14	21	6	31
27	2	17	10	29	4	23	12
18	9	28	3	24	11	30	5

Черт. 78.

Приведемъ теперь рѣшеніе задачи, указанное Эйлеромъ въ письмѣ къ Гольдбаху. Это рѣшеніе, какъ и предыдущее, является замкнутымъ (черт. 79).

Давая рѣшеніе этой задачи, Эйлеръ совершенно не указываетъ пріемовъ и какихъ либо соображеній, руководившихъ имъ при рѣшеніи этой задачи. Вопросъ этотъ детально не разрѣшенъ еще и до настоящаго времени; число всевозможныхъ рѣшеній этой задачи не опредѣлено, но все, что можно сказать относительно этого, — это то, что число этихъ рѣшеній чрезвычайно велико.

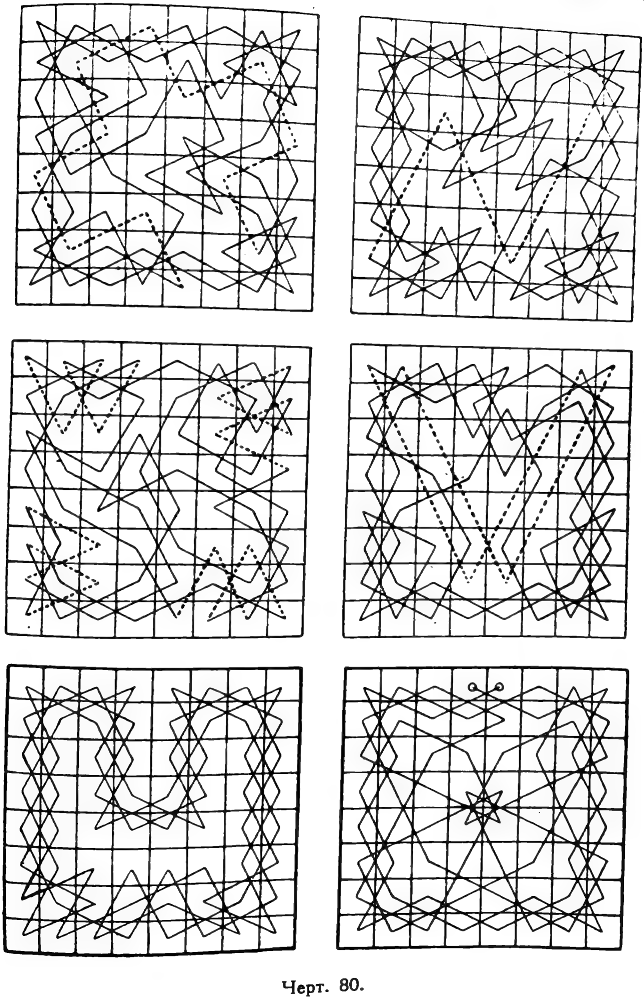
54	49	40	35	56	47	42	33
39	36	55	48	41	34	59	46
50	53	38	57	62	45	32	43
37	12	29	52	31	58	19	60
28	51	26	63	20	61	44	5
11	64	13	30	25	6	21	18
14	27	2	9	16	23	4	7
1	10	15	24	3	8	17	22

Черт. 79.

Діаграммы задачъ на ходъ коня въ прежнее время представлялись весьма запутанными и неправильными, но въ настоящее время несмотря на то, что по существу дѣла полная симметрія здѣсь вообще невозможна, были все-таки получены достаточно хорошіе результаты. Нѣкоторые образцы этихъ рѣшеній въ видѣ діаграммъ приведены на рис. 80, при чемъ изъ всѣхъ этихъ рѣшеній только послѣднее является *незамкнутымъ.*

Существуетъ нѣсколько различныхъ пріемовъ, при помощи которыхъ могутъ быть рѣшаемы задачи на ходъ коня, но всѣ они лишены строгаго теоретическаго обоснованія, а потому не всегда приводятъ къ желаемому результату. Наиболѣе пригоднымъ практическимъ правиломъ для составленія ходовъ коня является слѣдующій. Поставивъ коня на любую клѣтку шахматной доски, обходятъ имъ нѣсколько клѣтокъ въ произвольномъ порядкѣ, послѣ чего при каждомъ изъ послѣдующихъ ходовъ стараются выбрать изъ всѣхъ клѣтокъ, на которыя конь можетъ быть переставленъ изъ даннаго положенія, ту, съ которой ходомъ коня соединено наименьшее число оставшихся свободныхъ клѣтокъ,

такъ какъ эти клѣтки въ противномъ случаѣ могутъ остаться незанятыми. Примѣры примѣненія упомянутаго правила читатель можетъ найти въ книгѣ Ahrens'a «Математическія игры



Черт. 80.

и развлеченія», въ которой указаны также и нѣкоторые иные пріемы, дающіе болѣе или менѣе симметричныя рѣшенія. Здѣсь же мы упомянемъ еще о такъ называемыхъ *магическихъ* ходахъ коня, при которыхъ числа, указывающія порядокъ прохожденія конемъ клѣтокъ доски, имѣютъ постоянную сумму въ каждомъ послѣдовательномъ горизонтальномъ и вертикальномъ ряду. Такіе ходы называются магическими въ виду того, что они обладаютъ свойствомъ магическихъ квадратовъ, о которыхъ упоминалось въ I томѣ физико-математической хрестоматіи. Какъ показываетъ самый простой расчетъ, постоянная сумма для каждаго горизонтальнаго и вертикальнаго рядовъ при всѣхъ условіяхъ будетъ равна *260* (см. I томъ хрестоматіи). На черт. 81 приведенъ примѣръ магическаго хода коня въ томъ видѣ, какъ онъ былъ предложенъ русскимъ шахматистомъ Янишемъ. Если читатель возьметъ на себя трудъ соединить всѣ послѣдовательные ходы коня въ приводимомъ примѣрѣ, то онъ получитъ діаграмму, изъ которой видно, что это рѣшеніе не только удовлетворяетъ основному требованію, но вмѣстѣ съ тѣмъ является замкнутымъ и симметричнымъ.

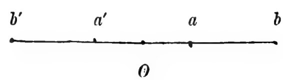
50	11	24	63	14	37	26	35	260
23	62	51	12	25	34	15	38	260
10	49	64	21	40	13	36	27	260
61	22	9	52	33	28	39	16	260
48	7	60	1	20	41	54	29	260
59	4	45	8	53	32	17	42	260
6	47	2	57	44	19	30	55	260
3	58	5	46	31	56	43	18	260
260	260	260	260	260	260	260	260	

Черт. 81.

Симметрія и ея проявленія въ природѣ *).

Весьма многія изъ понятій, которыми мы пользуемся въ обыденной жизни, не поддаются точному и краткому опредѣленію. Это часто зависитъ отъ того, что данное понятіе кажется простымъ только на первый взглядъ, но при болѣе глубокомъ его разсмотрѣніи оказывается весьма и весьма сложнымъ. Къ числу такого рода понятій принадлежитъ и понятіе о симметріи, проявленія которой встрѣчаются въ обыденной жизни на каждомъ шагу; мы наблюдаемъ, напр., симметрію въ архитектурѣ, въ музыкѣ, въ литературныхъ произведеніяхъ, въ растительномъ и животномъ мірѣ, въ расположеніи различныхъ предметовъ и т. п.

Задача науки, имѣющей дѣло съ этой областью, заключается въ томъ, чтобы сложное и многообразное объяснить на основаніи простого и очевиднаго.



Черт. 74.

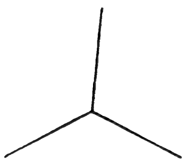
Самымъ простымъ фактомъ симметріи является симметрія двухъ точекъ относительно третьей, если онѣ лежатъ съ ней на одной прямой и равно удалены отъ нея. На чертежѣ 74

*) Матеріаломъ при составленіи этой статьи служила книга проф. *Вульфа*—«Симметрія и ея проявленія въ природѣ».

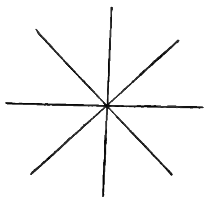
представленъ рядъ точекъ, попарно симметричныхъ относительно точки O.

Изъ разсмотрѣнія чертежа нетрудно понять, что и отрѣзки прямыхъ Oa и Oa', ab и $a'b'$, также симметричны, такъ какъ состоятъ изъ симметричныхъ точекъ. Затѣмъ, такъ какъ черезъ точку O можно провести множество прямыхъ, то можно получить множество точекъ, попарно симметричныхъ относительно O.

Если отрѣзки прямой, сходящіеся или пересѣкающіеся въ одной точкѣ, равны и расположены подъ равными углами другъ къ другу, то конечныя ихъ точки образуютъ собою группу симметричныхъ точекъ относительно центральной, называемой ***центромъ симметріи*** (черт. 76). Симметрію подобнаго рода мы разсмотримъ болѣе подробно на симметріи плоскихъ фигуръ.



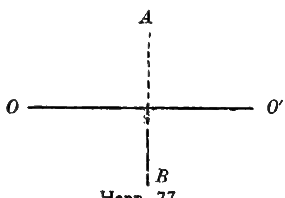
Черт. 75.



Черт. 76.

Безконечный рядъ точекъ, расположенный на безконечной прямой, въ равныхъ разстояніяхъ другъ отъ друга, представляетъ собой симметричный рядъ, такъ какъ всѣ эти точки попарно симметричны относительно любой точки.

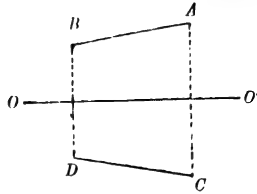
Двѣ точки A и B на плоскости будутъ симметричны относительно прямой, если онѣ расположены на одной прямой, перпендикулярной къ первой и равно удалены отъ нея (черт. 77). Если перегнуть чертежъ по линіи OO', то точки A и B совпадутъ.



Черт. 77.

Линія OO' называется ***линіей симметріи*** или ***осью*** симметріи.

Два отрѣзка прямой (черт. 78) будутъ расположены симметрично относительно прямой, если конечныя точки отрѣзковъ симметричны. Очевидно, что эти два отрѣзка должны быть равны и что каждой точкѣ на прямой AB соотвѣтствуетъ опредѣленная точка на прямой CD, причемъ обѣ точки будутъ расположены на равномъ разстояніи отъ линіи симметріи.

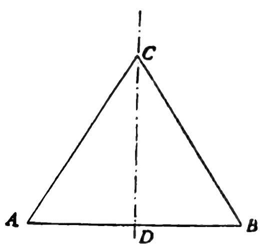


Черт. 78.

Симметрія линій въ пространствѣ опредѣляется подобнымъ же образомъ относительно плоскости симметріи. Два отрѣзка прямой будутъ расположены симметрично, если ихъ конечныя точки, а, слѣдовательно, и промежуточныя, находятся попарно на одномъ перпендикулярѣ къ плоскости и равно-удалены отъ него.

Симметрія плоскихъ фигуръ.

Плоскую фигуру мы называемъ симметричной, если она имѣетъ линію симметріи (иначе плоскостную ось симметріи), т.-е. такую линію, относительно которой всѣ точки фигуры симметричны. Если мы перегнемъ такую фигуру по линіи симметріи, то всѣ точки одной ея половины совпадутъ съ точками другой. Фигура можетъ имѣть не одну, а нѣсколько линій симметріи. Примѣромъ фигуры съ одной линіей симметріи можетъ служить равнобедренный треугольникъ, раздѣленный перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ вершины угла C на основаніе AB, на двѣ симметричныя части.



Черт. 79.

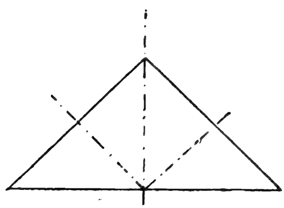
На этомъ примѣрѣ пояснится для насъ характерное отличіе симметріи фигуръ отъ ихъ равенства, заключающееся въ невозможности совмѣщенія фигуръ, симметричныхъ относительно одной линіи, не выводя ихъ изъ предѣловъ плоскости. Какъ бы ни перемѣщали мы треугольники

ACD и *BCD* въ данной плоскости, мы никогда ихъ не совмѣстимъ, и этотъ фактъ приводитъ насъ къ установленію различія между предметами совмѣстимо равными и симметрично равными,—различію, которое уяснится для насъ еще болѣе, когда мы отъ изученія симметріи фигуръ на плоскости перейдемъ къ изученію симметріи фигуръ въ пространствѣ. Два симметричныхъ, но неправильныхъ многогранника, напр., двѣ симметричныхъ неправильныхъ пирамиды никогда не могутъ быть совмѣщены въ нашемъ пространствѣ трехъ измѣреній, какъ бы мы ихъ въ немъ ни перемѣщали, и только по аналогіи съ только что разобраннымъ случаемъ утверждаютъ, что совмѣщеніе ихъ возможно въ пространствѣ четырехъ измѣреній. Въ теоріи симметріи при изученіи фигуръ подобнаго рода пользуются т. наз. способомъ зеркальнаго отраженія.

Зеркальное изображеніе фигуры симметрично самой фигурѣ; возможность совмѣщенія съ зеркальнымъ изображеніемъ нѣкоторой фигуры какой-нибудь другой фигуры доказываетъ симметрію послѣдней съ данной.

Установивъ, такимъ образомъ, различіе между совмѣстимо равными и симметрично равными фигурами, мы тотчасъ же должны оговориться, что понятія эти не исключаютъ другъ друга и при извѣстныхъ условіяхъ совпадаютъ.

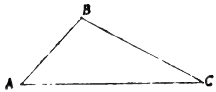
Такъ, если мы возьмемъ равнобедренный треугольникъ, составленный изъ двухъ равныхъ равнобедренныхъ прямоугольныхъ треугольниковъ, то полученный треугольникъ будетъ дѣлиться линіей симметріи на два симметрично равныхъ и совмѣстимо равныхъ треугольника.



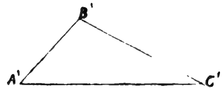
Черт. 80.

Вообще говоря, если линія симметріи дѣлитъ фигуру на такія двѣ части, изъ которыхъ каждая сама по себѣ симметрична, т.-е. имѣетъ свою линію симметріи, то такія фигуры и совмѣстимо равны, но совмѣщающіяся въ нихъ точки не принадлежатъ къ симметрично расположеннымъ точкамъ данной фигуры.

Возьмемъ далѣе двѣ неправильныя фигуры, не имѣющія линій симметріи, но совмѣстимо равныя; напр.,два треугольника (черт. 00).



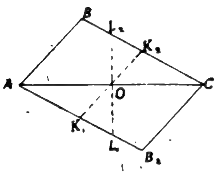
Черт. 81.



Черт. 82.

Приложивъ ихъ одинъ къ другому сторонами AC и A^1C^1 такъ, чтобы онѣ совпали несоотвѣтственными точками, получимъ параллелограммъ (черт. 83), не имѣющій осей симметріи. Ближайшее разсмотрѣніе однако показываетъ, что точки симметріи въ немъ имѣются.

Каждая линія, проведенная черезъ средину O линіи AC, пересѣчетъ его стороны на равныхъ разстояніяхъ отъ точки O и

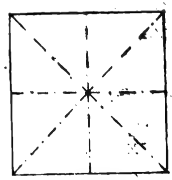


Черт. 83.

дастъ двѣ точки, напр. K_1 и K_2, симметричныя относительно точки O, которая и носитъ названіе центра симметріи. Если мы повернемъ полученную фигуру на 180^0 около центра симметріи, то она совпадетъ всѣми своими точками съ точками, имъ симметричными; такъ какъ эти точки будутъ точками ея первоначальнаго положенія, то и вся фигура своими очертаніями совпадетъ со своимъ первоначальнымъ положеніемъ.

Отъ этого случая симметріи фигуры, имѣщей точку симметріи, но не имѣющей осей симметріи перейдемъ къ случаямъ симметріи, въ которыхъ встрѣчается и то, и другое.

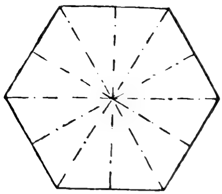
Для этого разсмотримъ квадратъ и правильный шестиугольникъ.



Черт. 84.

Квадратъ имѣетъ 4 линіи симметріи, точка пересѣченія которыхъ является его центромъ симметріи. Вращаясь около него, квадратъ, черезъ каждые 90°, приходитъ въ совпаденіе со своимъ первоначальнымъ положеніемъ, совмѣщаясь съ нимъ 4 раза въ теченіе полнаго оборота.

Правильный шестиугольникъ имѣетъ 6 осей симметріи и при полномъ оборотѣ около центра симметріи, совмѣщается съ первоначальнымъ положеніемъ 6 разъ.



Черт. 85.

Нетрудно замѣтить, на основаніи разобранныхъ примѣровъ, что центръ симметріи обладаетъ двумя свойствами и можетъ быть опредѣленъ двоякимъ образомъ.

1) Центръ симметріи есть точка, равноотстоящая отъ всѣхъ взаимно симметричныхъ точекъ.

2) Центръ симметріи есть центръ вращенія фигуры, перемѣщаясь около котораго на нѣкоторый уголъ, называемый *угломъ совмѣщенія*, фигура приходитъ въ совпаденіе симметричными точками со своимъ первоначальнымъ положеніемъ.

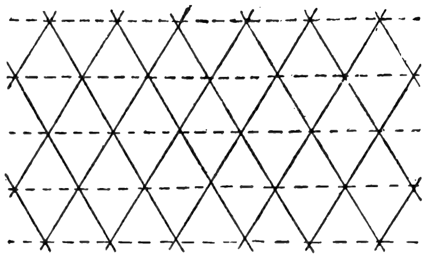
Число совмѣщеній, въ теченіе полнаго оборота фигуры около центра симметріи, называется порядкомъ ея симметріи и *порядкомъ центра симметріи*. Такъ параллелограммъ имѣетъ центръ симметріи второго порядка, квадратъ—четвертаго, шестиугольникъ—шестого, кругъ—безконечнаго.

Оба приведенныхъ опредѣленія центра симметріи вполнѣ согласуются одно съ другимъ и обусловливаютъ другъ друга для случая плоскихъ фигуръ. При изученіи симметріи фигуръ въ пространствѣ, мы замѣтимъ на примѣрахъ такъ-называемой сложной симметріи, что тамъ такого совпаденія не существуетъ.

Образованіе сложныхъ симметричныхъ фигуръ изъ простыхъ, симметричныхъ и несимметричныхъ, а также симметричное расположеніе предметовъ, представляютъ собою явленія одного и того же рода. Въ основѣ того и другого лежитъ извѣстное однообразіе въ расположеніи относительно линій симметріи и центровъ симметріи, съ которымъ мы встрѣчались уже при разсмотрѣніи плоскихъ фигуръ.

Одинъ случай заслуживаетъ здѣсь особеннаго вниманія. Если мы возьмемъ рядъ предметовъ, расположенныхъ на равномъ разстояніи другъ отъ друга по линіи окружности, то такое

расположенiе симметрично. Предположивъ, что радiусъ окружности увеличенъ до безконечности, мы получимъ прямолинейный рядъ, простирающiйся въ обѣ стороны въ безконечность, и рядъ этотъ будетъ симметриченъ, чего нельзя сказать о рядѣ, ограниченномъ нѣсколькими предметами, такъ какъ въ послѣднемъ случаѣ при передвиженiи ряда въ ту и другую сторону онъ будетъ выходить за свои предѣлы. Примѣръ такого рода представляетъ намъ такъ называемая параллелограмматическая сѣтка, которая получается путемъ соединенiя въ ряды симметричныхъ фигуръ, напр., треугольниковъ. Симметрiя проявляется здѣсь уже не какъ симметрiя отдѣльныхъ фигуръ, а цѣлыхъ рядовъ, которые при поступательномъ движенiи въ опредѣленныхъ направленiяхъ совмѣщаются другъ съ другомъ и потому симметричны, если мы предположимъ, что сѣтка покрываетъ собой всю неограниченную плоскость. При этомъ всѣ вершины параллелограммовъ сѣтки, называемыя узлами сѣтки, а также всѣ центры и всѣ средины сторонъ параллелограммовъ будутъ центрами симметрiи второго порядка.


Черт. 86.

Строя сѣтки, которыя удовлетворяли бы всѣмъ этимъ требованiямъ, нетрудно убѣдиться, что число такихъ сѣтокъ невелико; оно опредѣляется въ зависимости отъ угловъ, получаемыхъ при пересѣченiи линiй сѣтки; эти углы могутъ быть въ 60°, 90°, 120° и 180°; соотвѣтственно этому сѣтки могутъ быть составлены изъ равностороннихъ треугольниковъ, квадратовъ, ромбовъ и прямоугольниковъ.

Такого рода сѣтки употребляются, какъ важное пособiе при изученiи строенiя кристалловъ и растенiй, такъ какъ ихъ свойства совершенно тождественны съ нѣкоторыми свойствами кристалловъ и растенiй.

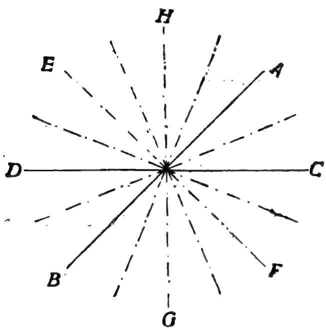
Основныя свойства линій симметріи и центровъ симметріи.

Плоская фигура, какъ мы уже видѣли на примѣрахъ симметріи правильныхъ многоугольниковъ, можетъ имѣть не одну, а нѣсколько осей симметріи.

Можно установить слѣдующія положенія.

Двѣ линіи симметріи, пересѣкающіяся подъ острымъ или тупымъ угломъ, обусловливаютъ существованіе третьей линіи симметріи.

Пусть AB и CD линіи симметріи. Разсматривая симметрію какой-либо фигуры по отношенію къ одной изъ этихъ линій, напр. CD, мы должны для точекъ найти симметричныя точки по другую сторону CD, такъ какъ точки A и B принадлежатъ къ точкамъ данной фигуры. Пусть эти точки будутъ F и E; соединивъ ихъ линіей FE, нетрудно доказать, что каждымъ двумъ точкамъ, симметричнымъ относительно AB, будутъ соотвѣтствовать двѣ точки, симметричныя относительно FE. Слѣдовательно FE, такъ же, какъ и AB, будетъ линіей симметріи. Понятно, что подобное же разсужденіе мы можемъ приложить и къ новой оси симметріи, разсматривая ее совмѣстно

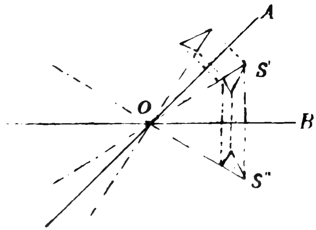


Черт. 87.

съ CD, и доказать существованіе линіи симметріи GH и т. д. Для того, чтобы такое построеніе не было безконечнымъ, необходимо, чтобы уголъ между двумя данными прямыми былъ равенъ цѣлой части 180°. Въ частномъ случаѣ, если уголъ между линіями симметріи равенъ 90°, данныя линіи не обусловливаютъ новыхъ линій симметріи. Примѣръ безконечнаго числа линій симметріи представляетъ окружность.

Точка пересѣченія двухъ линій симметріи представляетъ собой центръ симметріи, при чемъ уголъ совмѣщенія фигуры вдвое

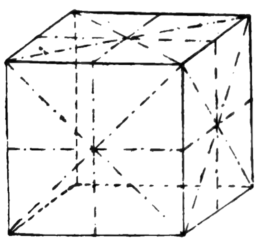
болѣе наименьшаго угла, образуемаго линiями симметрiи. Пусть OA и OB двѣ смежныя линiи симметрiи. Взявъ какой-нибудь элементъ фигуры S, мы найдемъ два элемента, симметричныхъ S, одинъ по другую сторону линiи AO, другой по другую сторону линiи OB. При вращенiи всей фигуры около центра O на уголъ SOS' элементы S и S' совпадутъ, какъ совмѣстимо равные.



Черт. 88.

Симметрiя пространственныхъ фигуръ.

Симметрiя пространственныхъ фигуръ опредѣляется по отношенiю къ плоскостямъ симметрiи, осямъ симметрiи и центру симметрiи, при чемъ плоскость симметрiи пространственной фигуры соотвѣтствуетъ линiи симметрiи плоской фигуры, а ось симметрiи пространственной фигуры соотвѣтствуетъ центру симметрiи плоской фигуры, но между центрами симметрiи тѣхъ и другихъ фигуръ такого соотвѣтствiя въ общемъ случаѣ не существуетъ. Сохраняя за собою свойство точки, равно отстоящей отъ симметричныхъ точекъ данной фигуры, центръ симметрiи перестаетъ быть центромъ вращенiя.


Черт. 89.

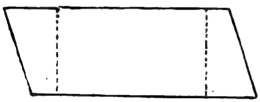
Примѣры такого рода мы встрѣтимъ въ случаяхъ такъ называемой сложной симметрiи.

Но предварительно приведемъ нѣсколько примѣровъ простой симметрiи фигуръ.

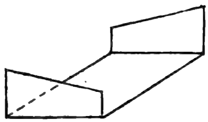
Симметричную фигуру представляетъ собою кубъ, имѣющiй 9 плоскостей симметрiи и 13 осей симметрiи, или же тетраэдръ, имѣющiй 3 оси симметрiи,

Наглядный примѣръ симметріи представляетъ наше тѣло, состоящее изъ двухъ симметричныхъ половинъ—правой и лѣвой. Зеркальное изображеніе предмета даетъ фигуру, симметричную предмету. Оси симметріи различаются своимъ порядкомъ, подобно тому, какъ центры симметріи фигуръ на плоскости. Такъ, напр., кубъ имѣетъ три оси четвертаго порядка, перпендикулярныя къ гранямъ куба въ ихъ центрахъ, четыре — третьяго порядка, соединяющія противоположныя вершины куба и шесть осей второго порядка, соединяющихъ средины противоположныхъ реберъ куба.

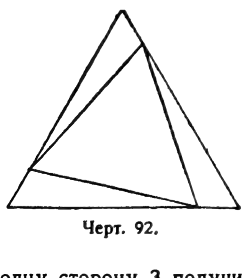
Порядокъ симметріи оси фигуры опредѣляется также, какъ и для плоскихъ фигуръ, числомъ совмѣщеній фигуры съ своимъ первоначальнымъ положеніемъ при поворотѣ на опредѣленный уголъ до полнаго оборота фигуры на 360° около своей оси симметріи. Сдѣлаемъ, напр., изъ картона параллелограммъ и отогнемъ съ обѣихъ сторонъ въ одномъ направленіи равныя части его площади. Если мы будемъ вращать эту фигуру около оси, перпендикулярной къ къ плоскости прямоугольника и проходящей черезъ центръ параллелограмма, то при полномъ оборотѣ фигуры она два раза придетъ въ совпаденіе сама съ собой. Поэтому ось симметріи въ этомъ случаѣ будетъ осью второго порядка.



Черт. 90.



Черт. 91.

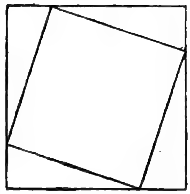


Черт. 92.

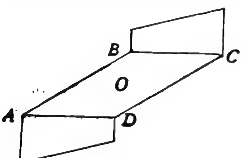
Ось симметріи третьяго порядка можно получить, если, напр., въ правильномъ треугольникѣ расположить другой, меньшій перваго, правильный треугольникъ такъ, какъ указано на черт. 92 и загнуть въ одну сторону 3 получившихся неправильныхъ треугольника.

Симметрія четвертаго порядка можетъ быть получена загибаніемъ въ одну сторону 4-хъ неправильныхъ треугольниковъ, получившихся при вписываніи въ квадратъ другого квадрата такъ, какъ указано на черт. 93.

Не всегда однако можно привести пространственную симметричную фигуру въ совмѣщеніе съ ея первоначальнымъ положеніемъ при помощи вращенія ея оси при полномъ оборотѣ. Такъ, напр., фигура, полученная изъ параллелограмма загибаніемъ равныхъ боковыхъ частей въ разныя стороны, симметрична и имѣетъ точку, дѣлящую пополамъ всѣ отрѣзки прямыхъ, которыя соединяютъ симметричныя точки фигуры; такая фигура имѣетъ центръ симметріи, но не имѣетъ оси симметріи, иначе говоря такой линіи, при вращеніи около которой на нѣкоторый опредѣленный уголъ, меньшій 360°, она совмѣщалась бы сама съ собой. Въ самомъ дѣлѣ, такая ось симметріи должна обладать тѣмъ свойствомъ, что всѣ группы ея взаимно симметричныхъ точекъ лежатъ въ одной плоскости, перпендикулярной къ этой оси, находясь отъ нея на равныхъ разстояніяхъ, причемъ линіи, соединяющія эти точки съ точкою пересѣченія плоскости и оси, образуютъ между собою равные углы. Этимъ условіямъ точки данной фигуры, очевидно, не удовлетворяютъ, хотя фигура и имѣетъ центръ симметріи. Если бы мы постарались опредѣлить симметрію этой фигуры относительно плоскости симметріи, принявъ за нее плоскость $ABCD$, то нашли бы, что и она не можетъ быть принята за такую плоскость, такъ какъ зеркальное отраженіе въ ней верхней части фигуры не совпадаетъ съ нижней. При дальнѣйшемъ разсмотрѣніи однако оказывается, что если мы возьмемъ совокупное дѣйствіе вращенія и зеркальнаго отраженія, то при поворотѣ на 180° около оси O, фигура совмѣстится съ своимъ первона-



Черт. 93.



Черт. 94.

чальнымъ положеніемъ и поэтому должна считаться симметричной. Этотъ примѣръ представляетъ собой случай сложной симметріи, когда фигура имѣетъ центръ симметріи, но не имѣетъ ни оси, ни плоскости симметріи. Несмотря на это и въ данномъ случаѣ говорятъ, что фигура имѣетъ нереальную или мнимую ось симметріи и нереальную или мнимую плоскость симметріи. Введеніемъ такихъ понятій хотятъ высказать ту мысль, что совокупное ихъ дѣйствіе даетъ вполнѣ реальный результатъ совмѣщенія фигуры.

Разсмотримъ еще такой примѣръ; возьмемъ квадратъ, вписанный въ другой квадратъ и загнемъ 4 боковыхъ треугольника подъ прямымъ угломъ, но попеременно черезъ одинъ въ разныя стороны. Отыскивая въ этой фигурѣ элементы симметріи, мы найдемъ въ ней только одну ось симметріи второго порядка, вращаясь около которой фигура будетъ совпадать съ своимъ первоначальнымъ положеніемъ черезъ каждые 180°. Повернувъ же фигуру на 90° и сравнивъ ея новое положеніе съ прежнимъ, мы замѣтимъ, что отогнутые треугольники по отношенію къ прежнимъ представляютъ собой какъ бы ихъ зеркальное отраженіе отъ средней части плоскости квадрата. Слѣдовательно въ этомъ случаѣ одного поворота на 90° недостаточно для того, чтобы произошло совмѣщеніе фигуры съ первоначальнымъ положеніемъ, точно также, какъ недостаточно было бы одного зеркальнаго отраженія. Необходимо совмѣстное дѣйствіе этихъ двухъ факторовъ. Первый предполагаетъ существованіе симметріи четвертаго порядка относительно оси, второй симметрію относительно плоскости средней части квадрата.

Въ прежнее время ошибочно предполагалось, что сложная симметрія представляетъ собой нѣчто невозможное въ природѣ. Это мнѣніе нѣсколько лѣтъ тому назадъ опровергнуто Вейбергомъ, добывшимъ кристаллы изъ сплава химическихъ соединеній кремнія, аллюминія, кальція и кислорода. Изученіе этихъ кристалловъ обнаружило, что симметрія ихъ точно та же, что и симметрія вышеразсмотрѣннаго примѣра квадрата съ загнутыми въ разныя стороны углами.

Укажемъ теперь слѣдующія свойства плоскостей и осей симметріи.

1) Каждая плоская фигура, имѣющая центръ симметріи имѣетъ и ось симметріи, перпендикулярную къ плоскости фигуры въ ея центрѣ.

2) Если пересѣчь симметричную пространственную фигуру, имѣющую ось симметріи, плоскостью, перпендикулярной къ оси, то въ сѣченіи получится симметричная фигура.

3) Двѣ пересѣкающіяся подъ какимъ-либо угломъ (не подъ прямымъ) плоскости симметріи обусловливаютъ существованіе третьей. Уголъ между смежными плоскостями симметріи долженъ быть цѣлою частью 180°. Доказывается это положеніе точно также, какъ подобное ему положеніе относительно осей плоскихъ фигуръ.

На этомъ свойствѣ основано устройство всѣмъ извѣстной игрушки—калейдоскопа, въ которой посредствомъ трехъ зеркалъ, расположенныхъ подъ угломъ въ 60°, изображаются разнообразныя симметричныя фигуры изъ цвѣтныхъ осколковъ стекла или бумажекъ.

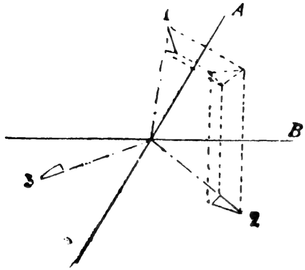
4) Линія пересѣченія плоскостей симметріи пространственной фигуры есть ея ось симметріи. Уголъ совмѣщенія фигуры вдвое больше угла между смежными плоскостями симметріи, а порядокъ оси симметріи равенъ числу плоскостей симметріи.

5) Пространственная фигура сложной симметріи можетъ быть образована изъ фигуры, имѣющей ось симметріи, замѣною нѣкоторыхъ частей ея ихъ зеркальными отраженіями.

При изученіи всѣхъ до сихъ поръ разсмотрѣнныхъ случаевъ симметріи мы пользовались пріемомъ совмѣщенія фигуръ и ихъ частей или посредствомъ зеркальнаго отраженія въ плоскостяхъ симметріи, или же посредствомъ вращенія ихъ около оси симметріи. Самъ собою возникаетъ вопросъ, не могутъ ли быть оба эти пріема сведены къ одному. Вопросъ этотъ рѣшенъ въ утвердительномъ смыслѣ итальянскимъ ученымъ Віалемъ, построившимъ свое доказательство на основаніи исчисленія кватерніоновъ и проф. Вульфомъ на основаніи элементарныхъ геометрическихъ соображеній.

Нетрудно доказать, что совмѣщеніе симметричныхъ элементовъ фигуры, имѣющей ось, можетъ быть достигнуто сложнымъ зеркальнымъ отраженіемъ въ вспомогательныхъ плоскостяхъ.

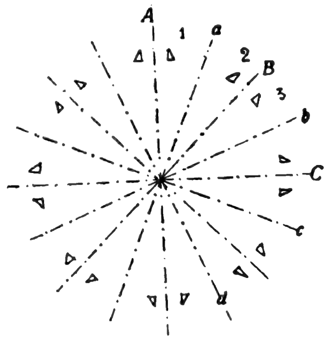
Возьмемъ, напр., фигуру, имѣющую центръ симметріи третьяго порядка и уголъ совмѣщенія 120° (рис. 95); симетричные элементы этой фигуры 1, 2 и 3, представленные на чертежѣ 95, послѣдовательно совмѣщаются другъ съ другомъ при поворотѣ фигуры около центра на 120°. Но совмѣщеніе элементовъ фигуры можетъ быть достигнуто и инымъ путемъ. Если мы введемъ двѣ вспомогательныя зеркальныя плоскости A и B, пересѣкающіяся другъ съ другомъ подъ угломъ въ 60° и перпендикулярныя къ плоскости, то элементъ 1-ый, отразившись въ зеркальной поверхности A, а элементъ 2-ой въ зеркальной поверхности B дадутъ два изображенія, совмѣщающіяся въ одномъ элементѣ плоскости, показанномъ на чертежѣ пунктиромъ.



Черт. 95.

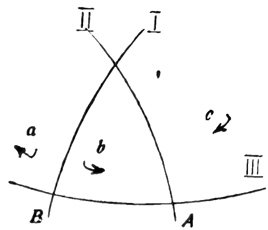
Для фигуры, имѣющей нѣсколько плоскостей симметріи, плоскости симметріи сами могутъ служить зеркальными плоскостями. Изображеніе элемента перваго въ плоскости a и изображеніе этого изображенія въ плоскости B совпадаетъ съ элементомъ третьимъ и т. д. (черт. 96).

Для случая сложной симметріи въ пространствѣ вообразимъ трегранный уголъ, состоящій изъ трехъ зеркальныхъ плоскостей. Пусть ABC соотвѣтствующій этому углу сферическій треугольникъ на шарѣ. Данная на поверхности шара фигура a, напр., стрѣлка, отразившись въ зеркальной плоскости I-й дастъ изображеніе b, а это послѣднее, отра-



Черт. 96.

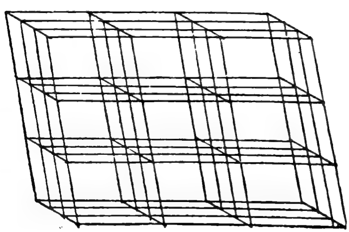
зившись въ зеркалѣ II-омъ, дастъ изображенiе стрѣлки *c*. Наконецъ, въ зеркалѣ III мы получимъ отраженiе стрѣлки *c* въ *d*. Но стрѣлка *d* можетъ быть получена и изъ стрѣлки *a* путемъ сложной симметрiи, а именно вращенiемъ послѣдней около оси, совпадающей съ прямой пересѣченiя зеркальныхъ плоскостей I и II и отраженiемъ въ зеркалѣ третьемъ.



Черт. 97.

Такимъ образомъ мы видимъ, что разнообразные случаи симметрiи можно привести къ симметрiи фигуры относительно плоскости, сдѣлавъ плоскость симметрiи основнымъ элементомъ въ ученiи о симметрiи, а два другiе, ось и центръ, производными.

Подобно тому, какъ отдѣльная симметричная фигура состоитъ изъ частей совмѣстимо равныхъ или симметрично равныхъ, расположенныхъ сходственнымъ образомъ относительно плоскостей и центра, точно также изъ осей и нѣсколькихъ данныхъ фигуръ, симметричныхъ или равныхъ, можетъ быть образована сложная симметричная фигура или симметричная группа фигуръ; ихъ симметрiя опредѣляется относительно тѣхъ же элементовъ симметрiи, т.-е. плоскости, оси и центра, которые опредѣляютъ симметрiю отдѣльной фигуры. Такъ изъ нѣсколькихъ пирамидъ можетъ быть образованъ правильный многогранникъ, нѣсколько призмъ могутъ образовать одну новую и т. д.


Черт. 98.

Особаго рода симметрiю фигуръ, взятыхъ въ неограниченномъ числѣ, представляетъ собой такъ-называемая параллелепипедальная рѣшетка.

Если мы возьмемъ извѣстную уже намъ паралеллограмматическую сѣтку и будемъ перемѣщать ее вмѣстѣ съ ея плоскостью параллельно самой себѣ по направленiю,

не лежащему въ ея плоскости, на опредѣленныя и равныя между собой разстоянія, то получимъ фигуру рѣшетки, состоящей изъ неограниченнаго числа равныхъ параллелепипедовъ, прилегающихъ сторонами другъ къ другу. Рѣшетка эта обладаетъ центрами симметріи, помѣщающимися въ углахъ рѣшетки, въ центрахъ граней параллелепипедовъ, въ центрахъ самихъ параллелепипедовъ и въ срединахъ ихъ реберъ. Кромѣ того такая рѣшетка совмѣщается сама съ собой при поступательныхъ перемѣщеніяхъ, а также можетъ имѣть плоскости и оси симметріи. Рѣшетка эта, какъ увидимъ, имѣетъ большое значеніе при изученіи кристалловъ.

Симметрія въ мірѣ животныхъ.

Явленія симметріи въ растительномъ и животномъ царствѣ, какъ и вообще въ мірѣ органической и неорганической природы чрезвычайно многочисленны и разнообразны. Детальное изученіе формъ окружающей насъ жизни съ несомнѣнностью обнаруживаетъ явленіями симметріи коренные основы жизни и непреложные ея законы.

Прежде всего въ животномъ мірѣ мы наблюдаемъ въ симметріи проявленіе принципа экономіи въ жизнедѣятельности и развитіи животнаго организма. Нуждаясь въ значительной поверхности, чтобы ею дышать, чувствовать и воспринимать пищу, организмъ все же таки не можетъ чрезмѣрно увеличивать своей поверхности, такъ какъ этимъ нарушился бы существенно принципъ экономіи въ средствахъ самозащиты. Слѣдующій примѣръ пояснитъ намъ это. Правильный шестиугольникъ (рис. 100) заключаетъ въ себѣ площадь въ шесть разъ большую, чѣмъ площадь каждаго изъ составляющихъ его треугольниковъ, но периметръ его только въ два раза больше периметра треугольника. Здѣсь мы имѣемъ примѣръ выгоды, приносимой симметріей; сложивъ нѣсколько одинаковыхъ частей въ одну общую симметричную фигуру, мы дѣлаемъ эту фигуру удобнѣе для извѣстныхъ цѣлей—въ данномъ случаѣ для цѣлей самозащиты отъ вліянія вредныхъ внѣшнихъ условій и достигаемъ этого ничѣмъ инымъ, какъ однообразнымъ воспроизведеніемъ одной и той же фигуры.

Построенный по типу симметричнаго шестиугольника организмъ обладаетъ симметріей, которую біологи называютъ *лучевою;* она обладаетъ осью симметріи и нѣсколькими плоскостями симметріи, проходящими черезъ эту ось. Наивысшая степень такой симметріи есть симметрія шара, гдѣ

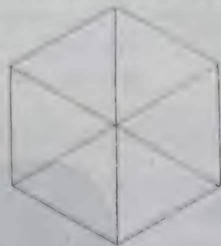


Рис. 100.

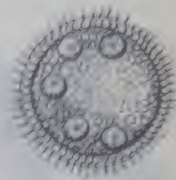


Рис. 101.

осей и плоскостей безчисленное множество. Примѣромъ такой шаровой симметріи, или, какъ ее называютъ зоологи, *гомаксонной*, можетъ служить вольвоксъ (Volvox, рис. 101), состоящій изъ микроскопическаго шарообразнаго скопленія клѣтокъ. Чтобы не особенно увеличивать своей поверхности, животныя этого типа образуютъ на своей поверхности отростки-щупальца, расположенныя также лучисто-симметрично. Подобный же примѣръ представляетъ намъ корненожка, снабженная лучисто расположенными отростками (рис. 102).

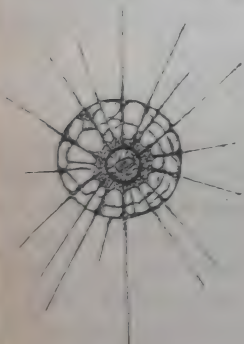


Рис. 102.

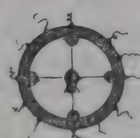


Рис 103.

Морская звѣзда (рис. 104) и морской ежъ (рис. 105) даютъ примѣры пятилучевой симметріи, медуза же (рис. 103) — четырехлучевой.

Лучевая симметрія наиболѣе удобна для животныхъ, ведущихъ сидячій образъ жизни; не будучи въ состояніи перемѣщаться и поворачивать своего тѣла, они, благодаря одинаковому устройству своего тѣла по отношенію къ средней оси, могутъ одинаково реагировать по различнымъ направленіямъ.

Лучевая симметрія пригодна для плаванія, но для другихъ способовъ перемѣщенія этотъ родъ симметріи становится весьма неудобнымъ; поступательное перемѣщеніе находитъ себѣ въ лучистой симметріи естественное препятствіе.

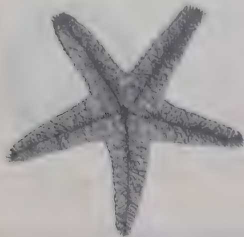


Рис. 104.

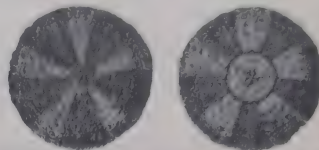


Рис. 105.

Поэтому, по мѣрѣ измѣненія образа жизни, нѣкоторые изъ упомянутыхъ животныхъ съ лучистой симметріей мѣняютъ свою форму, вытягиваясь въ одномъ направленіи.

Поступательное движеніе также весьма плохо осуществимо и для несимметричныхъ формъ.

Есть только одинъ случай симметріи, который не только не мѣшаетъ поступательному движенію, но, наоборотъ, въ высшей степени ему способствуетъ. Это та симметрія, при которой животное устроено одинаково съ одной и съ другой стороны, т. наз. симметрія съ одной вертикальной плоскостью, т.-е. та симметрія, которая у зоологовъ называется *двусторонней*. Животныя, наиболѣе совершенно одаренныя способностью перемѣщенія, обладаютъ какъ разъ этой симметріей.

Разсматривая подробно симметрію животныхъ, мы замѣтили бы, что она въ очень рѣдкихъ случаяхъ выдерживается до конца, т.-е. распространяется на всѣ органы животнаго. Такъ у человѣка печень расположена на правой сторонѣ тѣла, а сердце на лѣвой. Это объясняютъ тѣмъ, что пластичность и подвижность животнаго организма прямо противоположна той неподвижной уравновѣшенности частей, которая связана съ симметріей. Поэтому мы вездѣ въ животномъ царствѣ имѣемъ дѣло съ большимъ или меньшимъ нарушеніемъ симметріи.

Конечно, если причины нарушенія симметріи лежатъ въ глубокихъ нарушеніяхъ нормальныхъ свойствъ самихъ элементовъ, изъ которыхъ слагается организмъ, то мы уже заходимъ въ область явленій патологическихъ.

Симметрія въ мірѣ растеній.

Растенія отличаются отъ животныхъ своей неподвижностью и, въ соотвѣтствіи съ этимъ, меньшей пластичностью своихъ тканей, представляя поэтому болѣе благопріятныя условія для проявленія симметріи. Какъ и у неподвижныхъ животныхъ, у растеній преобладаетъ лучевая форма симметріи, типичнымъ примѣромъ которой служатъ круглые стволы деревьевъ, съ годичными концентрическими кольцами и радіальными лучами.

Листья по своему физіологическому назначенію должны обладать большою поверхностью, такъ какъ они служатъ для усвоенія углекислоты изъ воздуха, для дыханія и испаренія. Поэтому наиболѣе совершенная форма листа должна быть пластинчатая, а такъ какъ листъ однимъ концомъ прикрѣпленъ къ стеблю, то его пластинка естественно должна обладать двусторонней симметріей. Эта симметрія иногда не выдерживается строго, и по одну сторону своего средняго нерва листъ бываетъ больше, чѣмъ по другую. Но и въ листѣ часто остаются слѣды лучевой симметріи. Примѣромъ можетъ служить листъ настурціи, съ прикрѣпленнымъ почти въ срединѣ его черешкомъ, ссединеннымъ съ листомъ почти перпендикулярно, также — листъ конскаго каштана, лапчатый листъ клена и т. под.

Въ цвѣтахъ растеній природа, несомнѣнно, воплотила идею красоты, а потому интересно будетъ остановиться на симметріи именно этихъ органовъ растеній. Совершенно несимметричные цвѣты встрѣчаются у растеній очень рѣдко, обыкновенно же они бываютъ съ одной

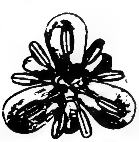


Рис. 106.

Рис. 107.

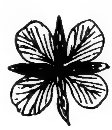


Рис. 108.

плоскостью симметріи, такъ называемые зигоморфные (рис. 106) и съ нѣсколькими плоскостями симметріи— актиноморфные цвѣты (рис. 107 и рис. 108).

Рис. 109.

Симметрія растенія проявляется также въ расположеніи его листьевъ на стеблѣ и вѣтвяхъ и въ расположеніи органовъ, происшедшихъ изъ частей цвѣтка, въ расположеніи чешуекъ въ почкѣ, въ еловой шишкѣ и т. п. Располагаясь винтомъ по побѣгу, листья какъ бы раскидываются во всѣ стороны и не заслоняютъ другъ друга отъ свѣта, столь необходимаго для жизни растеній. Смотря на побѣгъ сверху, мы видимъ листорасположеніе въ такъ называемой мозаикѣ листьевъ (рис. 109).

Существуетъ законъ листорасположенія, опредѣляющій, на какую часть окружности нужно повернуть стебель, чтобы перейти по винтовой линіи отъ одного листа къ другому. Уголъ этотъ наз. угломъ расхожденія листьевъ. Пріемъ для его опредѣленія слѣдующій. Срѣжемъ побѣгъ перпендикулярно къ его длинѣ, на уровнѣ одного листа. Что бы перейти отъ перваго листа ко второму, надо по круговой линіи срѣза пройти нѣкоторый путь, т.-е. повернуть цилиндръ на уголъ расхожденія листьевъ, и затѣмъ пройти по образующей цилиндра, т.-е. по длинѣ побѣга нѣко-

Рис. 110.

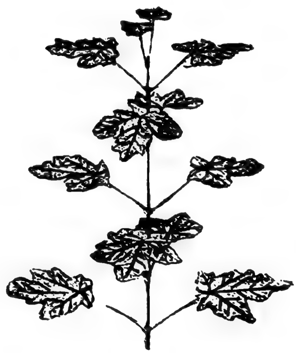


Рис. 111.

торое разстояніе*). Здѣсь мы имѣемъ характерные для винтовой линіи поворотъ и поступательное перемѣщеніе.

При этомъ уголъ расхожденія можетъ быть цѣлою частью не одного, а нѣсколькихъ полныхъ поворотовъ и будетъ опредѣляться отношеніемъ числа листьевъ къ числу оборотовъ. На рис. 100 изображенъ случай листорасположенія, выражающійся дробью $\frac{2}{5}$. Это значитъ, что цилиндръ надо повернуть пять разъ около оси для перехода отъ листа къ листу. Рис. 111 представляетъ листорасположеніе клена, выражаемое дробью $\frac{1}{2}$. Если мы развернемъ поверхность стебля въ плоскость, то всѣ винтовыя линіи, такъ наз. парастихи, превратятся въ прямыя и главныя изъ нихъ составятъ сѣтку, въ углахъ которой будутъ помѣщаться основанія листовыхъ органовъ. Всѣ другія парастихи будутъ прямыми, проходящими черезъ два какихъ-нибудь узла сѣтки. Замѣчательно то, что парастихи располагаются другъ относительно друга по тому же закону, по которому располагаются ребра граней кристалловъ.

Симметрія въ мірѣ кристалловъ.

Симметрія имѣетъ первостепенное значеніе въ систематикѣ кристалловъ. Все распредѣленіе кристалловъ на классы составлено въ настоящее время на основаніи ихъ симметріи. Мало того, благодаря тому, что кристаллъ есть симметричное тѣло, явилась возможность предсказать, какіе классы кристалловъ встрѣчаются въ природѣ; этихъ классовъ оказалось тридцать два. Это первостепенное значеніе симметричной формы кристалла объясняется тѣмъ, что внѣшняя симметрія является здѣсь какъ бы выраженіемъ нѣкоторой внутренней симметріи, — симметріи свойствъ кристалла. Внѣшняя симметрія кристалла распространяется, такъ сказать, и на внутреннія его свойства; кристаллъ представляетъ собою тѣло однородное и между различными его частями нѣтъ никакой разницы.

Если мы будемъ изучать свойства кристалла по различнымъ

*) См. статью: «Геометрія въ природѣ».

его направленіямъ, то замѣтимъ, что они неодинаковы. Такъ, свѣтъ, звукъ, теплота и электричество распространяются въ кристаллѣ съ различною скоростью, въ зависимости отъ того направленія, въ которомъ мы ихъ будемъ разсматривать. Этому соединенію однородности вещества съ различіемъ его свойствъ по различнымъ направленіямъ можно дать графическое изображеніе, условившись представлять однородность параллельными рядами прямолинейно-расположенныхъ и равноотстоящихъ другъ отъ друга точекъ, а различіе свойствъ—различіемъ разстояній между точками въ разныхъ направленіяхъ.

Изображеніе строенія кристалла, разсматриваемое въ одной плоскости, представится намъ при такихъ условіяхъ въ видѣ двухъ рядовъ параллельныхъ линій, пересѣкающихся подъ нѣкоторымъ угломъ, т.-е. мы получимъ изображеніе параллелограмматической сѣтки. Изображеніе же всей однородной кри-

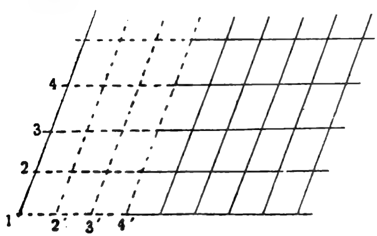


Рис. 112.

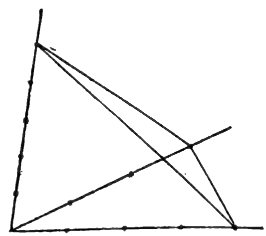


Рис. 113.

сталлической среды въ пространствѣ трехъ измѣреній даетъ пространственная рѣшетка, построенная на трехъ пересѣкающихся въ общей точкѣ прямыхъ, раздѣленныхъ промежутками, равными для одного и того же измѣренія, но различными для всѣхъ трехъ (см. рис. 113). Точки эти называются узлами рѣшетки. Такая рѣшетка даетъ намъ возможность изобразить математически вѣрно и внѣшнія очертанія кристалла.

Если изъ такой рѣшетки вырѣзать тѣло, ограниченное плоскостями, проходящими черезъ узлы рѣшетки, то грани его будутъ расположены по закону цѣлыхъ чиселъ, который совер-

шенно тождественен съ закономъ цѣлыхъ чиселъ, по которому располагаются грани кристалла.

Пространственная рѣшетка представляетъ намъ, такимъ образомъ, точное изображенiе кристалла, какъ со стороны его внутренней однородности, такъ и со стороны его внѣшнихъ очертанiй. Она даетъ возможность изслѣдовать всѣ возможныя формы кристалловъ и, какъ было сказано выше, опредѣлить число классовъ кристалловъ, различныхъ по своей симметрiи, при чемъ оказывается, что кромѣ извѣстныхъ намъ въ числѣ 32, должны существовать еще два класса: одинъ, характеризуется тремя плоскостями симметрiи, пересѣкающимися по одной оси и четвертой плоскостью, перпендикулярной къ предыдущимъ; другой характеризуется тройной осью симметрiи и перпендикулярной къ ней плоскостью симметрiи.

Здѣсь слѣдуетъ замѣтить, что 32-й классъ, открытый только въ 1907 г. Вейбергомъ, предугадывался изучавшими симметрiю кристалловъ еще до открытiя. Сказаннаго, полагаемъ, достаточно для того, чтобы уяснить себѣ всю важность ученiя о симметрiи для кристалловъ. Но значенiе это уяснится еще болѣе, если мы примемъ во вниманiе, что кристаллографiя есть часть науки болѣе универсальной, науки о симметрiи вещества вообще, т.-е. о той средѣ, въ которой протекаютъ всѣ физическiя явленiя и состоянiе которой обусловливаетъ ихъ ходъ.

Симметрiя среды.

По распространенному воззрѣнiю, вещество, а вмѣстѣ съ тѣмъ и среда физическихъ явленiй аморфна и вмѣстѣ съ тѣмъ изотропна, т.-е. никакой разницы въ зависимости отъ направленiя въ ней замѣтить нельзя, и аморфное состоянiе вещества по отношенiю къ кристаллическому есть первичное состоянiе, состоянiе же кристаллическое—вторичное, производное. Совершенно противоположнаго воззрѣнiя держится на этотъ счетъ наука. Именно, кристаллизованное вещество она признаетъ за первичное состоянiе, аморфное же считаетъ за нарушенiе этого первичнаго состоянiя. Нѣмецкiй физикъ Фойстъ, всю свою жизнь посвятившiй изученiю явленiй въ кристаллахъ,

говоритъ слѣдующее: «Кристаллизованное вещество является нормальнымъ состоянiемъ твердой матерiи, аморфное же нарушеннымъ ея состоянiемъ». Поэтому въ кристаллическомъ видѣ оно обнаруживаетъ свои физическiя свойства въ самомъ чистомъ и самомъ совершенномъ видѣ, въ аморфномъ же—въ мутномъ и затуманенномъ. Мы должны усвоить себѣ то воззрѣнiе, что громадное большинство твердыхъ тѣлъ кристаллизовано и при ближайшемъ разсмотрѣнiи многiя изъ тѣхъ тѣлъ, которыя мы считаемъ аморфными, представляютъ собой иногда смѣсь различныхъ тѣлъ, мѣшающихъ другъ другу кристаллизоваться, а иногда и переходную стадiю къ кристаллическому состоянiю.

Среда, въ которой протекаютъ физическiя явленiя, должна считаться, вообще говоря, средой симметричной, въ зависимости отъ строенiя которой совершаются физическiя явленiя. Пояснимъ это слѣдующимъ примѣромъ.

Волнообразная поверхность воды отличается отъ поверхности ея въ спокойномъ состоянiи именно своей симметрiей. Сопротивленiе движенiю, которое встрѣчаетъ предметъ, движущiйся вдоль волнъ, отлично отъ сопротивленiя, которое онъ встрѣчаетъ, двигаясь противъ волнъ.

Точно такъ же и движенiе по теченiю отлично отъ движенiя противъ теченiя и отъ движенiя, перпендикулярнаго теченiю. Соотвѣтственно каждому изъ этихъ направленiй можно провести свою ось симметрiи. Замѣтимъ, что симметрiю, которую мы здѣсь встрѣчаемъ, нельзя назвать причиною различiя въ движенiяхъ предмета въ собственномъ смыслѣ слова, но въ ней выражаются тѣ внутреннiя свойства среды, которыя обусловливаютъ собою ходъ явленiя. Укажемъ еще на нѣсколько наиболѣе распространенныхъ физическихъ явленiй, въ которыхъ проявляется влiянiе симметрiи.

Положимъ, что лучъ свѣта, состоящiй изъ колебанiй частицъ эѳира, падаетъ на пластинку кристалла исландскаго шпата, обладающую двумя линiями симметрiи. Въ результатѣ вся масса эѳирныхъ частицъ разбивается на двѣ группы, изъ которыхъ одна колеблется параллельно одной линiи симметрiи, другая параллельно другой и лучъ, падающiй на кристаллъ, раздѣляется на два луча, иду-

щихъ по разнымъ направленіямъ. Если мы положимъ пластинку исландскаго шпата на печатную строку, то увидимъ вмѣста одной двѣ строки. Явленіе это называется явленіемъ поляризаціи свѣта. Причина его заключается въ измѣненіяхъ скоростей свѣта по различнымъ осямъ симметріи кристалла.

Распространеніе теплоты представитъ намъ подобный же примѣръ измѣненія въ скоростяхъ по различнымъ направленіямъ. Если пластинку кристалла покрыть тонкимъ слоемъ воска и затѣмъ дотронуться до нее нагрѣтымъ остріемъ металлическаго стержня, то расплавленный участокъ будетъ имѣть форму эллипса или окружности въ зависимости отъ симметріи, которую имѣетъ кристаллъ.

Явленія электризаціи нѣкоторыхъ кристалловъ, наблюдаемыя при ихъ нагрѣваніи и охлажденіи, обнаруживаютъ два строго опредѣленныхъ мѣста на кристаллѣ, на одномъ изъ которыхъ появляется положительное, а на другомъ отрицательное электричество. При этомъ мѣсто кристалла, наэлектризованное, напр., положительно при нагрѣваніи, при охлажденіи электризуется отрицательно. Оказывается, что въ этомъ случаѣ симметрія кристалла бываетъ такова, что никакимъ симметричнымъ преобразованіемъ нельзя совмѣстить одинъ конецъ такого направленія съ другимъ.

Направленіе это называется полярнымъ; оба противоположныхъ заряда располагаются на разныхъ его полюсахъ.

Симметрія, которую мы въ этихъ и подобныхъ имъ случаяхъ обнаруживаемъ, обусловливаетъ то, что одна и та же причина имѣетъ совершенно различныя слѣдствія, измѣняющіяся какъ по величинѣ, такъ и по направленію, въ зависимости отъ измѣненія свойствъ среды въ различныхъ ея направленіяхъ.

Геометрія и природа.

Приступая къ изученію внѣшняго міра, человѣкъ старается выразить въ краткихъ и точныхъ математическихъ формулахъ содержаніе своего опыта. Однако міръ такъ сложенъ и многообразенъ, зависимости между явленіями такъ запутаны, что удается ему это только въ рѣдкихъ случаяхъ, да и то послѣ долгой и трудной работы накопленія фактовъ, провѣрки ихъ опытомъ и послѣ осторожнаго сопоставленія.

Тѣмъ не менѣе встрѣчаются иногда и такія явленія, къ которымъ мы почти сразу можемъ приложить языкъ математическихъ формулъ, другими словами выразить кратко и ясно всѣ соотношенія, наблюдавшіяся въ явленіи.

Однако на этомъ пути приходится быть очень осторожнымъ и все время провѣрять свои выводы опытомъ, чтобы избѣгнуть ошибочныхъ и необоснованныхъ заключеній.

Хорошимъ примѣромъ сказаннаго могутъ служить греки. Они были прекрасными математиками, но плохими экспериментаторами. Имъ казалось, что окружность есть самая совершенная кривая, а потому они заключали, что и планеты должны двигаться по окружностямъ. Они полагали, что окружность есть символъ вѣчности и потому она наиболѣе отвѣчаетъ вѣчному вращенію, которое греки наблюдали на небесномъ сводѣ. Что они ошибались—теперь извѣстно всякому; каждый теперь знаетъ, что небесныя тѣла движутся не по окружностямъ и что нѣтъ линій совершенныхъ или несовершенныхъ, но есть просто линіи.

Въ самомъ дѣлѣ, если для человѣка большое значеніе имѣетъ простота и правильность, то для самой природы эти понятія

не имѣютъ никакого значенія. Ей ничего не стоитъ создать тончайшія сплетенія кристаллическихъ формъ или гигантскія петли, описываемыя планетами.

Тѣмъ не менѣе для человѣческаго познанія эти понятія играютъ громадную роль, такъ какъ умъ всегда начинаетъ съ изученія простѣйшаго, чтобы постепенно подняться до пониманія самыхъ сложныхъ отношеній и зависимостей.

Извѣстны многіе факты изъ міра неорганической природы, когда матерія принимаетъ формы правильныхъ геометрическихъ тѣлъ. Таковы, напримѣръ, формы кристалловъ или мыльныхъ пленокъ на проволочныхъ сѣткахъ и т. п.

Тѣмъ болѣе интересны подобные факты, когда ихъ можно наблюдать среди представителей растительнаго и животнаго царствъ природы, гдѣ всѣ соотношенія и законы въ высшей степени сложны и запутаны.

Обратимся прежде всего къ человѣку и его органамъ чувствъ. Оказывается, что пріятное и непріятное, по крайней мѣрѣ для слуха и зрѣнія, приводимое часто, какъ примѣръ субъективности, въ которой не можетъ быть никакой общей мѣрки,— тѣмъ не менѣе имѣютъ подъ собой вполнѣ опредѣленное основаніе, поддающееся иногда математической формулировкѣ.

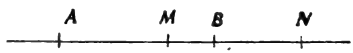
Еще Пиѳагоръ, наблюдая, по преданію, высоту тона натянутой струны, замѣтилъ, что консонансы или пріятныя созвучія получаются при математически опредѣленныхъ отношеніяхъ между длиной струны и степенью ея натяженія. Основываясь на этомъ, онъ даже построилъ поэтическій образъ небесныхъ сферъ, вращающихся вокругъ центральнаго огня по законамъ гармонической пропорціи, выражающей отношенія между числами колебаній натянутыхъ струнъ, при чемъ эти сферы своимъ движеніемъ производятъ безконечно прекрасную, божественную музыку, настолько тонкую, что ее могутъ слышать лишь высшіе геніи человѣчества.

Качественное различіе тоновъ, опредѣляемое ихъ высотою, даетъ возможнсстъ распредѣлить всѣ тоны въ одинъ рядъ. Лица, обладающія музыкально развитымъ слухомъ, способны не только опредѣлить, который изъ двухъ тоновъ выше, но и оцѣнить, насколько одинъ изъ нихъ выше другого, иначе говоря, опре-

дѣлить разность высотъ двухъ тоновъ или, напримѣръ, указать рядъ тоновъ, равноотстоящихъ другъ отъ друга; ощущенія, вызываемыя такимъ рядомъ тоновъ, составляютъ, какъ оказывается, ариѳметическую прогрессію, а числа колебаній этихъ тоновъ—геометрическую прогрессію.

Съ другой стороны извѣстно, что длины вибрирующихъ струнъ, дающихъ три ноты—до, ми, соль, которыя составляютъ наиболѣе совершенный аккордъ,—такъ-называемое мажорное трезвучіе, пропорціональны числамъ 1, $^4/_5$ и $^2/_3$. Числа же колебаній этихъ трехъ тоновъ имъ обратно пропорціональны, или, что то же, пропорціональны числамъ 1, $^5/_4$ и $^3/_2$, или числамъ 4, 5, 6, а такъ какъ $4+6=2.5$, то длины такихъ трехъ струнъ будутъ удовлетворять соотношенію $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$ или, по упрощеніи, соотношенію $\frac{b-a}{a}=\frac{c-b}{c}$. Такое соотношеніе называется гармонической пропорціей, а дѣленіе прямой на части, удовлетворяющія ей—гармоническимъ дѣленіемъ.

Пусть, напримѣръ, намъ дана прямая AB (черт. 114) и точка M между A и B. При всякомъ данномъ положеніи точки M отношеніе $\frac{AM}{MB}$ будетъ имѣть вполнѣ опредѣленную величину. При движеніи точки M по AB будетъ мѣняться и величина отношенія. Если же точка M перейдетъ черезъ B, то разстояніе MB придется считать отъ M влѣво, а потому, согласно условію, принятому для знаковъ отрѣзковъ, отрѣзокъ MB будетъ отрицательнымъ, а потому и отношеніе $\frac{AM}{MB}$ сдѣлается тоже отрицательнымъ. Ясно, что разъ дана величина отношенія и знакъ его, то положеніе точки M на AB будетъ вполнѣ опредѣлено.



Черт. 114.

Пусть теперь мы имѣемъ два отношенія $\frac{AM}{MB}$ и $\frac{AN}{NB}$, равныя по величинѣ, но обратныя по знаку; эти отношенія можно иначе

представить въ видѣ $\frac{AM}{MB}=\frac{NA}{NB}$ *). Ясно, что въ этомъ случаѣ одна изъ точекъ, напримѣръ M, будетъ внутри отрѣзка AB, а другая, N—внѣ его.

Обозначая NA черезъ a, NM—черезъ b и NB—черезъ c, получимъ: $\frac{b-a}{a}=\frac{c-b}{c}$, т.-е. какъ разъ то соотношенiе, которому удовлетворяютъ длины струнъ, дающихъ мажорное трезвучiе, т.-е. гармоническую пропорцiю. Сами точки A, B, M и N называются *гармоническими*; эти точки можно опредѣлить еще такъ: четыре гармоническiя точки таковы, что двѣ изъ нихъ дѣлятъ отрѣзокъ между двумя другими внутреннимъ и внѣшнимъ образомъ въ одномъ и томъ же отношенiи.

Замѣтимъ, что если три числа удовлетворяютъ непрерывной ариѳметической пропорцiи, то числа, обратныя имъ, будутъ удовлетворять гармонической. Отсюда непосредственно слѣдуетъ, что, такъ какъ числа колебанiй тоновъ мажорнаго трезвучiя удовлетворяютъ непрерывной ариѳметической пропорцiи, то числа, имъ обратныя и пропорцiональныя длинамъ соотвѣтствующихъ струнъ, образуютъ пропорцiю гармоническую.

Такимъ образомъ мы видимъ, что созвучiе или консонансъ, другими словами прiятное для слуха сочетанiе тоновъ, должно удовлетворять опредѣленному математическому отношенiю. Всякое другое сочетанiе, не удовлетворяющее такому соотношенiю, составитъ диссонансъ, иначе говоря для слуха будетъ не прiятнымъ.

Подобно тому, какъ въ ощущенiяхъ слуха съ эстетической стороны большую роль играетъ созвучiе, гармонiя тоновъ, отвѣчающая опредѣленнымъ математическимъ требованiямъ, въ зрительныхъ ощущенiяхъ также большое значенiе имѣетъ дѣленiе въ крайнемъ и среднемъ отношенiи или, какъ его называли древнiе,—золотое сѣченiе **) или золотое дѣленiе.

Оказывается, что фигура или форма какого-либо предмета производитъ на глазъ тѣмъ лучшее впечатлѣнiе, чѣмъ болѣе соотношенiя ея частей удовлетворяютъ условiямъ горизонталь-

*) Получимъ, что $(-AN)=(+NA.)$.

**) Aurea sectio.

ной симметріи относительно вертикальной оси, а части самой этой оси—принципу золотого дѣленія.

Дѣленіе въ крайнемъ и среднемъ отношеніи было прекрасно извѣстно еще грекамъ и ихъ архитекторы вносили принципъ такого дѣленія въ создаваемыя ими сооруженія. Знаменитый Пароенонъ, являющійся классическимъ образцомъ древне-греческой архитектуры, весь построенъ по этому принципу.

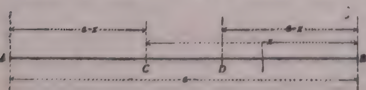
Пиоагорейцы приписывали золотому дѣленію мистическое значеніе. Въ эпоху Возрожденія была подробно разработана эстетическая сторона золотого дѣленія. Капитальный трудъ Луки Пачіоли «Divina proportio», написанный въ 1509 г., былъ составленъ подъ вліяніемъ и при участіи Леонардо-да-Винчи. Что касается нашего времени, то здѣсь необходимо указать на книгу Адольфа Цейзинга, вышедшую въ 1854 г. въ Лейпцигѣ *). Богатый матеріалъ объ эстетической роли золотого дѣленія собранъ въ сравнительно недавнее время Фехнеромъ и Уитмеромъ.

Задачу дѣленія въ крайнемъ и среднемъ отношеніи можно формулировать такъ: пусть a—длина отрѣзка, который требуется раздѣлить въ крайнемъ и среднемъ отношеніи. Обозначимъ черезъ x длину большей части, тогда искомое отношеніе будетъ имѣть видъ:

$$a:x=x:(a-x), \text{ или } x^2+ax-a^2=0, \text{ откуда}$$

$$x_1=a\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0{,}618\ldots a \quad \text{и} \quad x_2=-a\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2}=-1{,}618\ldots a.$$

Само собою разумѣется, что данный отрѣзокъ a (рис. 115) можно раздѣлить въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, исходя при построеніи какъ изъ конца A, такъ и изъ конца B. Соотвѣтственно этому получимъ двѣ точки C и D. Пусть $AB=a$, $CB=x$. Тогда $AC=a-x$ и $\frac{a}{x}=\frac{x}{a-x}$ Преобразовывая получен-



Черт. 115.

*) Заглавіе книги: «Neue Lehre von den Proportionen des mänschlichen Körpers aus einem bisher unbekannt gebliebenen, die ganze Natur und Kunst durchdringenden morphologischen Grundgesetz entwickelt».

ную пропорцію, будемъ послѣдовательно имѣть $\frac{a}{x}-1=\frac{x}{a-x}-1$; $\frac{a-x}{x}=\frac{x-(a-x)}{a-x}$ или $\frac{x}{a-x}=\frac{a-x}{x-(a-x)}$. Но $x=BC$, $a-x=BD$ и $x-(a-x)=CD$; другими словами, точка D дѣлитъ въ крайнемъ и среднемъ отношеніи не только $a=AB$, но и $x=CB$ *).

Представимъ теперь пропорію $\frac{a}{x}=\frac{x}{a-x}$ въ видѣ: $\frac{x}{a-x}=\frac{a}{x}$ и возьмемъ отношеніе суммы первыхъ двухъ членовъ къ предыдущему, повторяя эту операцію надъ результатомъ сколько угодно разъ; сравнивая результаты, получимъ рядъ:

$$\frac{x}{a-x};\ \frac{a}{x};\ \frac{a+x}{a};\ \frac{2a+x}{a+x};\ \frac{3a+2x}{2a+x};\ldots$$

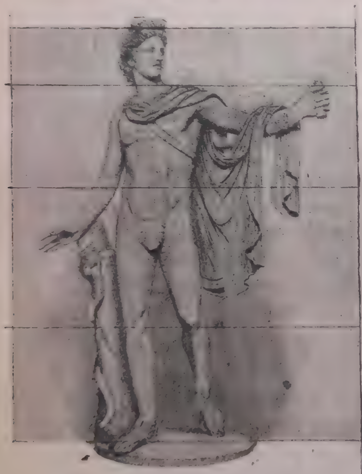


Рис. 116.

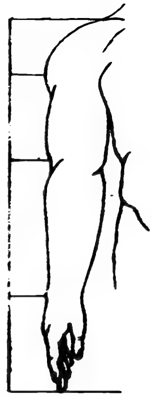
Очевидно, что въ полученномъ рядѣ отношеній каждая сосѣдняя пара, будучи соединена знакомъ равенства, дастъ новое золотое дѣленіе. Такимъ образомъ, разъ выполненное золотое дѣленіе даетъ мѣсто безконечному множеству новыхъ золотыхъ дѣленій.

Этотъ послѣдній фактъ оправдывается прежде всего на самомъ человѣческомъ тѣлѣ.

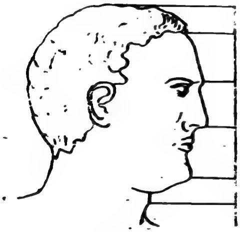
Въ самомъ дѣлѣ, если взять статую Аполлона Бельведерскаго и раздѣлить ее по вертикали въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, то линія золотого дѣленія (рис. 116) пройдетъ черезъ сре-

*) Замѣтимъ, что если за a мы примемъ радіусъ окружности, то золотое дѣленіе опредѣлитъ своимъ бóльшимъ корнемъ сторону правильнаго десятиугольника, вписаннаго въ эту окружность.

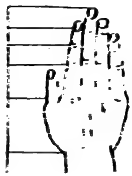
дину живота. Дѣля такимъ же образомъ обѣ полученныя части въ отдѣльности, получимъ сѣченія на высотѣ Адамова яблока и надколѣнныхъ чашекъ. Продолжая тотъ же процессъ дѣленія относительно головы, — получимъ рядъ сѣченій на высотѣ бровей, кончика носа, подбородка и т. д. (рис. 117).



Дѣля такимъ же образомъ вытянутую руку (рис. 119) или кисть (рис. 118), въ обоихъ случаяхъ будемъ имѣть сѣченія на анатомически опредѣленныхъ мѣстахъ плеча, предплечья и кисти или же въ суставахъ пальцевъ. Но, какъ мы уже видѣли, золотое дѣленіе можетъ быть произведено въ обратномъ направленіи. Произведя его надъ статуей, мы убѣдимся, что и здѣсь сѣченія опредѣлятъ особенности строенія человѣческаго тѣла.



Черт. 117.



Черт. 118.

Черт. 119.

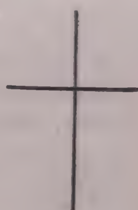
Какъ уже было упомянуто, Пареенонъ весь построенъ по принципу золотого дѣленія. Длина его архитрава равна 107 ф., а высота всего зданія 65 ф. Но 107.0,681 = 66,126 и (107+65).0,618 = 106,296; эти числа весьма удовлетворительно отвѣчаютъ требованію золотого дѣленія. Разбивая передній фасадъ Пареенона по вертикали въ крайнемъ и среднемъ отношеніи и продолжая этотъ процессъ надъ каждой частью, получимъ всѣ характерные выступы и архитектурныя особенности зданія (рис. 120).

Какъ мы уже говорили—золотое дѣленіе по отношенію къ зрѣнію играетъ роль, аналогичную роли гармоническаго дѣленія въ области слуховыхъ ощущеній. Такъ, напримѣръ, взявъ

(рис. 121) два прямоугольныхъ бруса и составивъ изъ нихъ фигуру креста, мы инстинктивно прикрѣпимъ меньшій брусъ

Черт. 120.

къ большему въ точкѣ, которая будетъ дѣлить большій брусъ въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, такъ какъ при такомъ расположеніи достигается наиболѣе красивое сочетаніе. То же относится и къ эллипсамъ, у которыхъ большая и малая оси удовлетворяютъ предыдущему соотношенію.



Черт. 121.

Масса обыденныхъ вещей, встрѣчающихся въ повседневной жизни, можетъ служить доказательствомъ того, какъ глубоко въ эстетической сторонѣ зрѣнія заключенъ принципъ золотого дѣленія. Достаточно смѣрить неравныя длины сторонъ у столовъ, визитныхъ карточекъ и т. п. предметовъ, чтобы убѣдиться въ сказанномъ. Въ средніе вѣка, когда были забыты почти всѣ пріобрѣтенія наукъ и искусствъ античнаго міра, принципъ золотого дѣленія врядъ ли былъ извѣстенъ и однако архитекторы готическихъ зданій нерѣдко придавали различнымъ частямъ этихъ зданій соотношенія, удовлетворяющія какъ разъ именно этому принципу.

Что касается до другихъ ощущеній, то о нихъ почти ничего нельзя сказать по недостатку опытнаго матеріала. Тѣмъ не менѣе законъ Вебера-Фехнера, по которому ощущеніе пропорціонально логариѳму раздраженія, показываетъ, что очень

вѣроятно существованіе нѣкоторыхъ соотношеній, доставляющихъ максимумъ удовольствія и для другихъ ощущеній.

Изъ сказаннаго видно, что извѣстныя закономѣрности наблюдаются и въ настолько субъективной и сложной области, какъ область прекраснаго. Всѣ подобные факты говорятъ намъ о томъ, что въ мірѣ все находится въ связи и человѣкъ, составляющій въ немъ только частный случай,—не представляетъ собой какого-либо исключенія изъ общихъ міровыхъ соотношеній.

Далеко не всегда, конечно, мы можемъ дать исчерпывающее объясненіе такихъ явленій, но это происходитъ по вполнѣ понятнымъ причинамъ недостаточно глубокаго знанія, а вслѣдствіе этого и невозможности связать разорванную для нашего пониманія цѣпь взаимодѣйствій.

Перейдемъ теперь къ различнымъ представителямъ растительнаго и животнаго царствъ природы.

Интересно, что то же самое золотое дѣленіе является закономъ расположенія листьевъ на стеблѣ.

Если мы возьмемъ вѣтку растенія, у котораго листья расположены не группами, а по одному и проведемъ линію по черешкамъ отъ одного листа къ другому, то замѣтимъ, что линія эта будетъ имѣть видъ винта.

Разсмотримъ теперь листъ, сидящій какъ разъ надъ тѣмъ листомъ, отъ котораго мы повели нашу винтовую линію. Между нимъ и даннымъ первымъ листомъ винтовая линія дѣлаетъ нѣсколько полныхъ оборотовъ (рис. 122). Пусть число оборотовъ равно, какъ на рисункѣ,—двумъ, а число листьевъ между A и K, считая по винтовой линіи,—равно семи. Часть винтовой линіи между двумя такими листьями A и K, сидящими на одной линіи, параллельной оси стебля,—называется цикломъ. Каждый циклъ вполнѣ характеризуется числомъ оборотовъ винтовой линіи, заключающихся въ немъ и числомъ листьевъ, сидящихъ на этихъ оборотахъ. Принято циклъ обозначать дробью, у которой числитель равенъ числу оборотовъ винтовой линіи, а знаме-

Черт. 122.

натель—числу расположенныхъ на нихъ листьевъ. Для нашего примѣра дробь эта будетъ $^2/_7$.

Наблюдая листорасположеніе у различныхъ растеній, ботаники замѣтили, что всѣ *наиболѣе распространенные* типы ихъ могутъ быть расположены въ рядъ

$$^1/_2,\quad ^2/_3,\quad ^3/_5,\quad ^5/_8,\quad ^8/_{13},\quad ^{13}/_{21}\ldots$$

Легко замѣтить, между прочимъ, что числитель и знаменатель каждой дроби этого ряда получаются путемъ сложенія числителей и знаменателей двухъ предыдущихъ и что знаменатель каждой дроби становится числителемъ слѣдующей; это такъ называемый *рядъ Фибоначчи.*

Взявъ любую пару сосѣднихъ дробей нетрудно убѣдиться, что каждая такая пара все ближе и ближе подходитъ къ пропорціи, требуемой золотымъ дѣленіемъ.

Послѣднее обстоятельство находитъ свое объясненіе въ томъ фактѣ, что всѣ дроби этого ряда оказываются подходящими дробями выраженія:

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}=(0,\ 1,\ 1,\ 1,\ \ldots)$$

которое, какъ мы уже видѣли, даетъ отношеніе большей части отрѣзка ко всему отрѣзку, раздѣленному въ крайнемъ и среднемъ отношеніи.

Обратимся теперь къ другому замѣчательному явленію, извѣстному въ наукѣ подъ названіемъ проблемы о пчелиныхъ ячейкахъ. Еще Паппъ, математикъ IV в., написавшій комментаріи къ «Началамъ» Эвклида, обратилъ вниманіе на геометрически правильную форму ячеекъ пчелиныхъ сотъ, но только Маклоренъ сумѣлъ дать этому факту простое объясненіе, основывающееся на рѣшеніи математической задачи о максимумѣ и минимумѣ. Дѣло въ томъ, что при постройкѣ сотъ, пчелы необходимо должны соблюдать экономію въ такомъ дорогомъ для нихъ матеріалѣ, какъ воскъ. Поэтому вопросъ о формѣ ячеекъ сводится къ нахожденію геометрической фигуры, обладающей при данномъ объемѣ минимумомъ поверхности.

Изъ самаго способа, какимъ производится у пчелъ постройка сотъ, необходимо должна слѣдовать правильная форма ячеекъ,

Въ самомъ дѣлѣ, каждая пчела является почти точной копіей всякой другой, такъ какъ наслѣдственность передается имъ всѣмъ болѣе или менѣе равномѣрно, а потому и строить она должна точно такъ же, какъ и всякая другая. Но если бы онѣ стали строить ячейки неправильной формы, то необходимо явились бы промежутки между ячейками и экономія матеріала не была бы соблюдена. Поэтому прежде всего намъ надо рѣшить вопросъ о видѣ многоугольниковъ, которые заполняли бы безъ просвѣтовъ всю плоскость.

Сумма угловъ правильнаго многоугольника, какъ извѣстно, равна $2d(n-2)$ и такимъ образомъ каждый его уголъ равенъ $\frac{2d(n-2)}{n}$. Пусть теперь въ какой-либо точкѣ плоскости сходятся своими вершинами k многоугольниковъ, гдѣ k—конечно цѣлое число. Тогда получимъ: $k\frac{2d(n-2)}{n}=4d$, или $k(n-2)=2n$. Преобразуя это уравненіе, будемъ имѣть:

$$k=\frac{2n}{n-2}=\frac{2n-4+4}{n-2}=\frac{2n-4}{n-2}+\frac{4}{n-2}=2+\frac{4}{n-2}.$$

Дробь $\frac{4}{n-2}$ можетъ быть цѣлымъ числомъ только въ случаѣ, если 4 дѣлится на $n-2$. Это возможно при $n=3$; 4 или 6. Поэтому треугольникъ, квадратъ и шестиугольникъ одновременно удовлетворяютъ поставленному условію. Остается рѣшить второй вопросъ—какая изъ этихъ фигуръ даетъ при равномъ периметрѣ максимумъ площади. Пусть треугольникъ, квадратъ и шестиугольникъ имѣютъ каждый периметръ p. Тогда стороны у нихъ будутъ соотвѣтственно: $\frac{p}{3}$, $\frac{p}{4}$ и $\frac{p}{6}$, а площади: $\frac{p^2\sqrt{3}}{18}$, $\frac{p^2}{9}$ и $\frac{p^2\sqrt{3}}{12}$. Очевидно самой большей площадью обладаетъ шестиугольникъ, а потому онъ и является рѣшеніемъ первой части задачи.

Такимъ образомъ, ячейки должны имѣть форму шестигранныхъ призмъ.

Перейдемъ теперь ко второй части задачи и рѣшимъ вопросъ о формѣ дна ячеекъ.

Дана правильная шестигранная призма (рис. 123). На продолженіи ея оси OO_1 возьмемъ точку S. Проведемъ затѣмъ черезъ S, B, D и F три плоскости. Каждая изъ нихъ отрѣжетъ отъ призмы тетраэдръ. Такъ какъ при этомъ $OS=CK$ и OC прямой SK дѣлится пополамъ, то, повернувъ каждый изъ тетраэдровъ около BD, FB и FD, мы, очевидно, получимъ изъ нихъ одинъ новый тетраэдръ $SBDF$ грани котораго SBD, SBF, SDF и DBF будутъ лежать въ плоскостяхъ первоначальныхъ разрѣзовъ.

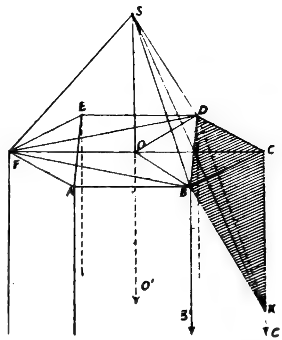


Рис. 123.

Полученный такимъ образомъ многогранникъ будетъ состоять изъ шестигранной призмы, оканчивающейся тремя ромбами съ общей вершиной въ точкѣ S.

Легко убѣдиться, въ томъ, что гдѣ бы мы ни взяли на оси точку S, полученный многогранникъ будетъ имѣть одинъ и тотъ же объемъ съ первоначальной призмой, но поверхности у нихъ будутъ различны и, вообще говоря, будутъ зависѣть отъ положенія точки S на оси SO.

Такимъ образомъ задача заключается въ опредѣленіи такого положенія точки S на оси призмы, чтобы полученный многогранникъ имѣлъ наименьшую поверхность.

Пусть $AB=a$, $BB'=OO_1=b$, $CK=SO=x$; тогда: $BF=a\sqrt{3}$, SV *) $=\sqrt{SO^2+OV^2}=\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+a^2}$, т. е. $SK=$ $=\sqrt{4x^2+a^2}$. Площадь ромба $SBKD$, равная полупроизведенію діагоналей BD и SK, равна $\frac{1}{2}a\sqrt{3a^2+12x^2}$; площадь

---

*) Точка V находится на срединѣ отрѣзка OC.

трапеціи $B'BK'C'=\frac{1}{2}a(b-x)$. Слѣдовательно поверхность многогранника, не считая основанія, выразится формулой

$$3a\left(\frac{1}{2}\sqrt{3a^2+12x^2}+2b-x\right).$$

Такъ какъ постоянный множитель $3a$ не играетъ роли при нахожденіи максимума и минимума, то вопросъ приводится къ нахожденію минимума выраженія, стоящаго въ скобкахъ. Положимъ, что $y=\frac{1}{2}\sqrt{3a^2+12x^2}+2b-x$, и найдемъ минимумъ по правиламъ дифференціальнаго исчисленія. Для этого приравняемъ нулю первую производную отъ y по x:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{6x}{\sqrt{3a^2+12x^2}}-1=0.$$

Рѣшая это уравненіе относительно x, будемъ имѣть:

$$6x=\sqrt{3a^2+12x^2};\ 36x^2=3a^2+12x^2;\ 24x^2=3a^2;\ 8x^2=a^2;\ x=\pm\frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

Такимъ образомъ для поверхности получаемъ выраженіе:

$$6ab+\frac{3a^2}{\sqrt{2}}.$$

Изъ треугольника BKV, въ которомъ $BK:BV:VK=1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$ найдемъ для угла BKV значеніе, равное 35°15′52″.

Если смѣрить соотвѣтственные углы пчелиной ячейки, то величина ихъ окажется равной только что найденнымъ значеніямъ. Что же касается до самой формы ячеекъ, то она въ точности воспроизводитъ форму, найденную нами путемъ вычисленій, т.-е. представляетъ собой шестигранную призму, оканчивающуюся по поверхности тремя ромбами.

Однако не одни только пчелы даютъ намъ примѣръ математической точности и правильности, достигнутой путемъ не размышленія, но инстинкта, который хотя и не можетъ по быстротѣ и удобству сравниться съ математикой, тѣмъ не менѣе достигаетъ иногда поразительныхъ результатовъ.

Такъ, напримѣръ, существуетъ жучекъ—березовый слоникъ (Rhynchites betulae), который для того, чтобы положить свои яички, свертываетъ въ трубку листья березы, ольхи и т. п. и въ образовавшійся сигарообразный мѣшокъ производитъ кладку. Жучковъ этого вида существуетъ очень много. Всѣ они надрѣзаютъ для этой цѣли одну половинку листа поперекъ и свертываютъ ее; затѣмъ надрѣзается вторая половина листа и навертывается на первую. Различные виды дѣлаютъ эти надрѣзы по разному, но существуетъ одинъ видъ, который придаетъ надрѣзу особую форму. Линія надрѣза (рис. 124) совершенно своеобразно изгибается, пересѣкая поверхность листа. Оказывается, что форма этой линіи не произвольна, а является эволютой *) краевой линіи листа. Задаваясь же вопросомъ о причинѣ того—почему жучекъ прорѣзаетъ именно эволюту края, а не какую-либо другую линію, мы найдемъ, что только въ первомъ случаѣ свертываніе листа производится легче всего и получаемый при этомъ мѣшокъ выходитъ болѣе плотнымъ и крѣпкимъ.

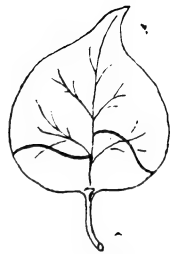


Рис. 124.

*) См. статью о дифференц. геометріи

Теорема Пиѳагора.

Въ элементарной геометріи теорема Пиѳагора занимаетъ исключительное положеніе. При отсутствіи практики, можетъ стереться изъ памяти множество другихъ звеньевъ Эвклидовой логической цѣпи, но кто разъ изучалъ геометрію, тотъ врядъ ли скоро забудетъ эту интересную теорему, связанную къ тому же съ характернымъ чертежомъ*). Такое исключительное вниманіе къ этой теоремѣ объясняется съ одной стороны—дѣйствительно важной ролью, которую она играетъ при рѣшеніи геометрическихъ задачъ, съ другой—самымъ характеромъ этой теоремы, простой по формулировкѣ и неожиданной**) по содержанію, наконецъ доказательствомъ ея, которое долго представлялось педагогамъ классическимъ образцомъ отвлеченнаго мышленія и потому служило пробнымъ камнемъ умственной зрѣлости ученика (отсюда—перешедшіе къ намъ изъ средневѣковья названія теоремы: «magister matheseos», т. к. теорема предлагалась на тогдашнихъ магистерскихъ экзаменахъ; «le pont aux anes», «die Esel-

*) Въ послѣднее время астрономами вполнѣ серьезно обсуждается вопросъ о возможности завязать сношенія съ предполагаемыми обитателями другихъ планетъ—чаще всего рѣчь идетъ о Марсѣ—при помощи свѣтового сигнала. И вотъ, въ качествѣ таковаго предполагается воспользоваться чертежомъ Пиѳагоровой теоремы: если наши адресаты существа разумныя, то весьма вѣроятно, что они самостоятельно пришли къ этой теоремѣ подобно тому, какъ независимо другъ отъ друга открыли ее китайцы, индусы, греки.

**) Часто приходится слышать отъ ученика—преимущественно отъ способнаго—что большинство теоремъ элементарной геометріи излишне, въ виду ихъ очевидности. О Пиѳагоровой теоремѣ этого никто не скажетъ.

brücke»—«мостъ ословъ», ироническая кличка, смыслъ которой понятенъ самъ собой).—При современной постановкѣ преподаванія геометріи, главную роль играетъ первая изъ указанныхъ сторонъ теоремы Пиѳагора, связанная съ *ариѳметической* (въ противоположность *геометрической*, о которой—ниже) формулировкой ея: «если стороны прямоугольнаго треугольника измѣрены одной и той же единицей, то квадратъ числа, выражающаго гипотенузу, равенъ суммѣ квадратовъ чиселъ, выражающихъ катеты». Теорема эта даетъ намъ возможность рѣшить основную задачу на вычисленіе: зная двѣ стороны прямоугольнаго треугольника, вычислить третью. Если припомнимъ, какими методами мы пользуемся при рѣшеніи болѣе сложныхъ геометрическихъ задачъ на вычисленіе, то легко замѣтимъ, что—за исключеніемъ тѣхъ случаевъ, когда неизвѣстные отрѣзки непосредственно вычисляются изъ пропорцій, доставляемыхъ подобіемъ—мы всегда примѣняемъ одинъ или нѣсколько разъ теорему Пиѳагора, для чего стараемся выдѣлить изъ нашей фигуры прямоугольные треугольники *).

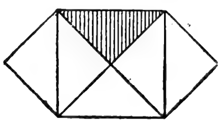
Иначе смотрѣли на теорему Пиѳагора древніе. Измѣреніе отрѣзковъ неизбѣжно приводитъ къ понятію объ ирраціональномъ числѣ (напр. діагональ квадрата, у котораго сторона равна 1, выражается ирраціональнымъ числомъ $\sqrt{2}$), а послѣдняго древніе, въ частности Пиѳагорейцы, тщательно избѣгали, считая его нарушеніемъ міровой гармоніи.—Поэтому первоначально теорема Пиѳагора появилась въ чисто-геометрической формулировкѣ: «квадратъ, построенный на гипотенузѣ, равновеликъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на катетахъ». Былъ ли Пиѳагоръ (прибл. VI в. до Р. Хр.) дѣйствительно первымъ, давшимъ доказательство для общаго случая, а если и былъ, то въ чемъ это

---

*) Нѣсколько рѣже приходится пользоваться сосѣдними съ Пиѳагоровой теоремами: «квадратъ катета равенъ произведенію изъ гипотенузы на прилежащій отрѣзокъ» и «квадратъ высоты, опущенный на гипотенузу, равенъ произведенію отрѣзковъ гипотенузы». Эти предложенія, первое изъ которыхъ служитъ для вывода (ариѳметическаго) теоремы Пиѳагора, въ свою очередь могутъ быть выведены изъ нея въ качествѣ слѣдствій (объ этомъ—ниже). Теоремы же о квадратѣ стороны, лежащей противъ остраго и тупого угла представляютъ собой двукратное примѣненіе теоремы Пиѳагора.

доказательство состояло,—мы не знаемъ. Извѣстный намъ изъ школы чертежъ впервые встрѣчается у Эвклида и, возможно, имъ самимъ придуманъ. Во всякомъ случаѣ несомнѣнно, что общему доказательству этой теоремы предшествовала провѣрка ея на частныхъ случаяхъ—именно тѣхъ, когда стороны прямоугольнаго треугольника выражаются цѣлыми числами (см. далѣе о Пиѳагоровыхъ числахъ). Историкъ математики Канторъ полагаетъ, что египтяне уже за 2300 г. до Р. Хр. знали, что треугольникъ со сторонами 3, 4 и 5 прямоугольный, и, конечно, замѣтили, что $3^2+4^2=5^2$.

Если вѣрить китайскому лѣтописцу, треугольникъ «3, 4, 5» былъ извѣстенъ его предкамъ приблизительно за 1100 л. до Р. Хр. Повидимому независимо отъ египтянъ и китайцевъ, индусы знали въ VIII в. до Р. Хр. довольно много частныхъ случаевъ прямоугольныхъ треугольниковъ. Въ «Сальвасутрѣ», религіозно-геометрической книгѣ индусовъ *) упоминаются прямоугольные треугольники со сторонами: 3, 4, 5; 5, 12, 13; 8, 15, 17; 7, 24, 25; 12, 35, 37 и 15, 36, 39. На каждомъ изъ этихъ треугольниковъ провѣряется теорема Пиѳагора; тутъ же приводится простой чертежъ (см. рис. 125), доказывающій справедливость теоремы для случая равнобедреннаго прямоугольнаго треугольника и, наконецъ, дается самая теорема (безъ доказательства) въ слѣдующей формѣ, характерной для той эпохи: «шнурокъ, натянутый наискось по прямоугольнику, производитъ двѣ площади, которыя производятся шнурками, натянутыми вдоль большей и меньшей стороны». Въ переводѣ на современный языкъ, это означаетъ: «квадратъ, построенный на діагонали прямоугольника, равновеликъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на его сторонахъ».



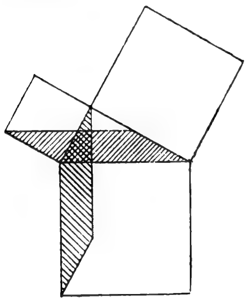
Черт. 125.

---

*) У индусовъ, какъ и у египтянъ, геометрія часто служила цѣлямъ религіознаго культа. Многіе предметы богослужебнаго обихода должны были имѣть строго установленныя геометрическія формы, и здѣсь, конечно, важно было точное построеніе прямого угла.

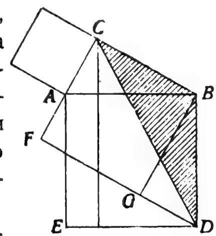
Различныя доказательства теоремы Пиѳагора.

При томъ повышенномъ вниманіи къ Пиѳагоровой теоремѣ, которое не оставляетъ ея до послѣдняго времени, не приходится удивляться обилію различныхъ доказательствъ (нѣмецкій ученый Wipper въ 1880 г. насчиталъ ихъ 46). Число ихъ, конечно, можетъ быть увеличиваемо до безконечности, такъ какъ, кромѣ совершенно новыхъ доказательствъ, можно съ безконечнымъ разнообразіемъ варьировать старыя, и нѣтъ границы, отдѣляющей такія варіации отъ новыхъ доказательствъ.—Не всѣмъ, напр., извѣстны слѣдующія два изъ многочисленныхъ видоизмѣненій Эвклидова доказательства.


Черт. 126.

1) Вмѣсто равенства двухъ треугольниковъ, фигурирующихъ въ обычномъ доказательствѣ, можно съ успѣхомъ воспользоваться равенствомъ двухъ параллелограммовъ (на черт. 126 заштрихованныхъ), изъ которыхъ одинъ равновеликъ квадрату, а другой прямоугольнику.

2) Можно одинъ изъ квадратовъ, построенныхъ на катетахъ (на черт. 127 взять бо́льшій квадратъ), перегнуть такъ, чтобы онъ налегалъ на $\triangle ABC$. Мы избавляемся тогда отъ необходимости доказывать равенство двухъ треугольниковъ, которые теперь замѣняются однимъ BCD, но должны вмѣсто этого показать, что сторона FG проходитъ черезъ точку D.

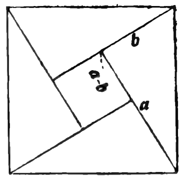


Черт. 127.

Изъ остальныхъ доказательствъ приведемъ нѣсколько наиболѣе замѣчательныхъ. Ихъ можно раздѣлить на двѣ группы: 1) *ариѳмо-геометрическія*, въ которыхъ отрѣзки разсматриваются, какъ числа, и доказательство основывается, помимо геометрическихъ соображеній, на числовыхъ тождествахъ; 2) *чисто-геоме-*

трическія, опирающіяся только на понятіе о равенствѣ фигуръ.

I. *Ариѳмо-геометрическія доказательства.* Здѣсь на первомъ мѣстѣ надо поставить историческое индусское доказательство, чертежъ котораго мы находимъ въ книгѣ Бхаскары (XII в. по Р. Хр.); вмѣсто доказательства, чертежъ сопровождается обычнымъ у индусовъ «смотри». Любопытно, что та же фигура была извѣстна китайцамъ, какъ увѣряетъ одинъ ихъ историкъ, за 1000 л. до Р. Хр. Посмотримъ, что можно извлечь изъ этой фигуры, пользуясь современными обозначеніями. Въ квадратѣ, построенномъ на гипотенузѣ c, умѣщаются, какъ видимъ, 4 прямоугольныхъ $\triangle$-ка съ катетами a и b (a—большій катетъ) и, сверхъ того, внутренній квадратъ со стороной ($a—b$). Если напишемъ теперь, что площадь большого квадрата равна суммѣ площадей его частей, то получимъ:

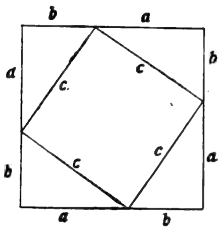


Черт. 128.

$$c^2 = 4\frac{ab}{2} + (a - b)^2,$$

откуда, раскрывая скобки и дѣлая приведеніе, будемъ имѣть;

$$c^2 = a^2 + b^2.$$



Черт. 129.

Приведемъ еще другое доказательство новѣйшаго происхожденія. Квадратъ со стороной, равной суммѣ $a+b$ катетовъ, разложимъ (см. черт. 129) на 4 прямоугольныхъ $\triangle$-ка со сторонами a и b, и квадратъ со стороной c, равной гипотенузѣ. Принимая опять во вниманіе величины площадей, имѣемъ:

$$(a + b)^2 = 4\frac{ab}{2} + c^2,$$

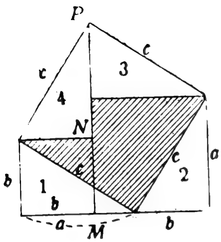
откуда, по упрощеніи,

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

II. *Чисто-геометрическія доказательства* могутъ быть въ свою очередь разбиты на 1) доказательства посредствомъ вычи-

танія и 2) доказательства посредствомъ сложенія (разложенія).

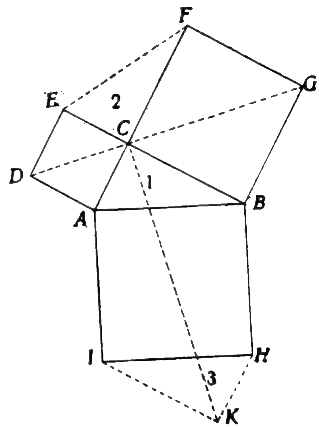
Въ доказательствахъ перваго типа берется нѣкоторая фигура (или двѣ равновеликихъ); если отнять отъ нея извѣстныя части, получается квадратъ, построенный на гипотенузѣ; если же отнять такія же части, но въ другихъ мѣстахъ фигуры, то останутся два квадрата, построенные на катетахъ.



Черт. 130.

Вотъ, напримѣръ, одно изъ такихъ доказательствъ, также, повидимому, извѣстное индусамъ.

Квадраты, построенные на катетахъ a и b, расположены рядомъ, а квадратъ, построенный на гипотенузѣ c, такъ, какъ показано на черт. 130 (разумѣется, надо доказать, что при этомъ точки M, N, P окажутся на одной прямой—но это не трудно). Треугольники 1, 2, 3 и 4 равны между собой. Если отнимемъ отъ всей фигуры треугольники 1 и 2, то останется квадратъ гипотенузы *); если же отнимемъ равные имъ треугольники 3 и 4, останутся квадраты катетовъ, чѣмъ теорема доказана.



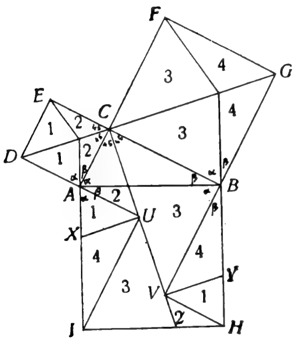
Черт. 131.

Приведемъ здѣсь еще слѣдующее доказательство. (черт. 131). Къ обычному чертежу присоединимъ нѣкоторыя вспомогательныя линіи: соединимъ вершины E и F, отчего получится $\triangle$-къ 2, равный исходному $\triangle$-ку 1; при сторонѣ IH построимъ $\triangle$-къ IKH, также равный $\triangle$-ку 1 (при чемъ $IK \parallel CB$ и $HK \parallel AC$). Получаются два шести-

*) Въ дальнѣйшемъ мы будемъ для краткости говорить «квадратъ гипотенузы (катета)» вмѣсто «квадратъ, построенный на гипотенузѣ (катетѣ)».

угольника $ADEFGB$ и $ACBHKI$, изъ которыхъ первый дѣлится пополамъ линіей DCG, а второй линіей CK. Но половины $ADGB$ и $ACKI$ обоихъ шестиугольниковъ равны между собой, въ чемъ легко убѣдиться наложеніемъ, повернувъ $ADGB$ на 90^0 около вершины A. Слѣдовательно шестиугольники равновелики; если отнять отъ одного изъ нихъ $\triangle$-ки 1 и 3, то останется квадратъ гипотенузы, а если отъ другого шестиугольника отнять такія же части 1 и 2, то останутся квадраты катетовъ.

Отъ этого доказательства нетрудно перейти къ другому, но уже принадлежащему ко второму типу доказательствъ—«посредствомъ сложенія»; такъ называются доказательства, въ которыхъ квадратъ гипотенузы разбивается на нѣкоторыя части и на такія же части одновременно разбиваются квадраты катетовъ.



Черт. 132.

Подобное доказательство можно всегда наглядно провѣрить, вырѣзавъ (изъ бумаги, картона) всѣ три квадрата, разрѣзавъ ихъ на указанныя части и затѣмъ сложивъ изъ двухъ меньшихъ квадратовъ большій или наоборотъ *).

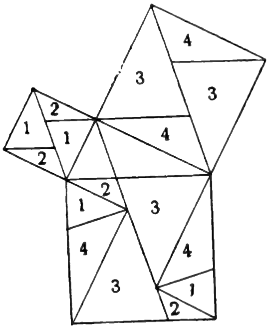
Въ самомъ дѣлѣ, при поворотѣ 4-угольника $ADDGB$ на 90 вправо около вершины A, треугольникъ ACB займетъ положеніе AUI, а при поворотѣ того же 4-угольника на 90^0 влѣво около вершины B—положеніе BVH. Легко показать, что точки V, U, и C лежатъ на одной прямой (послѣдняя совпадаетъ съ прямой CK чертежа 131). Если теперь проведемъ линіи UX и VU параллельно прямой DCG, то квадратъ гипотенузы разобьется на 8 попарно равныхъ треугольниковъ. Чтобы на такія же части разложились квадраты катетовъ, достаточно продолжить

*) Мы имѣемъ здѣсь такимъ образомъ задачу на складываніе и переложеніе фигуръ; см. соотвѣтств. статью.

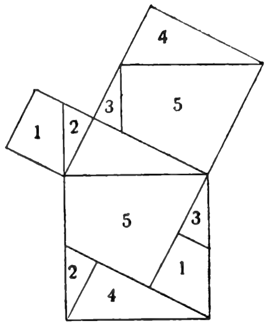
стороны AI и BH до встрѣчи съ прямой DCG и полученныя точки пересѣченія соединить соотвѣтственно съ вершинами E и G. Доказательство равенства частей, отмѣченныхъ на черт. одинаковыми цифрами, не представляетъ затрудненій.

Частичное видоизмѣненіе этого доказательства представлено на черт. 133, гдѣ вспомогательныя линіи проведены такъ, что дѣлаютъ равенство нѣкоторыхъ составляющихъ треугольниковъ болѣе нагляднымъ, благодаря параллельности ихъ сторонъ.

Приведемъ, наконецъ, еще одно доказательство при помощи разложенія, имѣющее историческій интересъ, такъ какъ оно



Черт. 133.



Черт. 134.

встрѣчается уже у арабскаго математика Аннаирици (ок. 900 г. до Р. Хр.). Слегка видоизмѣненное, это доказательство становится яснымъ изъ черт. 134. Нѣсколько искусственное разложеніе бо́льшаго квадрата будетъ понятнѣе, если сравнить его съ разложеніемъ того же квадрата, получающимся на черт. 127.

Какое же изъ предыдущихъ доказательствъ самое простое? Въ такой формулировкѣ, вопросъ можетъ служить образцомъ того, какихъ вопросовъ *не слѣдуетъ* ставить въ математикѣ. «Простота» доказательства не есть математическая величина, и потому сравненію не подлежитъ. Можно, конечно, ограничить вопросъ—и въ этомъ направленіи шли послѣднія изслѣдованія— но тутъ неизбѣжно вводится нѣкоторый произволъ. Если гово-

рить только о доказательствахъ путемъ сложенія, то можно, напр., за мѣру простоты принять число треугольниковъ, на которые разлагается квадратъ гипотенузы. Тогда самымъ простымъ слѣдуетъ признать доказательство Аннаирици (черт. 134), въ которомъ квадратъ гипотенузы разложенъ на 3 треугольника и 2 четыреугольника, что равносильно 7-ми треугольникамъ. Изслѣдованія выяснили, что дальнѣйшее упрощеніе въ этомъ направленіи невозможно, т.-е. нельзя дать доказательство, въ которомъ квадратъ гипотенузы разбивался бы меньше, чѣмъ на 7 треугольниковъ.

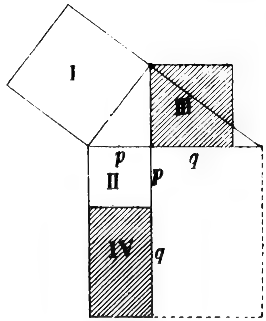
Но можно стать на иную точку зрѣнія и отдать предпочтеніе «симметричности» фигуры, которая получается отъ разложенія квадрата гипотенузы (подъ большей или меньшей симметричностью мы разумѣемъ въ данномъ случаѣ способность фигуры, состоящей изъ квадрата гипотенузы и его линій дѣленія, совмѣститься съ самой собой при поворотѣ около центра квадрата на большій или меньшій уголъ). Напр. фигура Аннаирици лишена симметріи: нуженъ полный поворотъ (на 360°) около центра, чтобы всѣ линіи пришли въ прежнее положеніе. А для квадрата, разбитаго на части, какъ показано на черт. 132 или 133, достаточенъ поворотъ на 180° и въ этомъ смыслѣ то доказательство проще.

Такимъ образомъ, каждое доказателоство имѣетъ свои преимущества.

Слѣдствія, обобщенія, аналогіи.

Въ тѣсной связи съ теоремой Пиѳагора находятся два предложенія, которыя въ современныхъ учебникахъ обыкновенно даются въ ариѳметической формулировкѣ и предшествуютъ доказательству (ариѳметическому) теоремы Пиѳагора. На языкѣ древнихъ эти предложенія могутъ быть выражены такъ: 1) «квадратъ, построенный на катетѣ, равновеликъ прямоугольнику, построенному на гипотенузѣ и прилежащемъ отрѣзкѣ», 2) «квадратъ, построенный на высотѣ (опущенной на гипотенузу), равновеликъ прямоугольнику, построенному изъ

отрѣзковъ гипотенузы». Обѣ теоремы допускаютъ чисто геометрическія доказательства. Справедливость первой обнаруживается попутно при обычномъ доказательствѣ теоремы Пиѳагора, потому что тамъ мы устанавливаемъ (см. черт. 135) равновеликость квадрата I съ прямоугольникомъ II+IV, у котораго большая сторона — гипотенуза, а меньшая—отрѣзокъ ея, о которомъ говорится въ условіи. Что касается второй теоремы, то ее легко вывести изъ Пиѳагоровой, если замѣтимъ, что квадратъ I равновеликъ—съ одной стороны, суммѣ квадратовъ II и III, съ другой—суммѣ квадрата II съ прямоугольникомъ IV. Отсюда вытекаетъ, что квадратъ III, построенный на высотѣ, равновеликъ прямоугольнику IV, построенному на отрѣзкахъ p и q гипотенузы.



Черт. 135.

Уже Эвклидъ зналъ слѣдующее обобщеніе Пиѳагоровой теоремы: «если на сторонахъ a, b и c прямоугольнаго треугольника построить какія угодно подобныя между собой фигуры A, B и C такъ, чтобы стороны треугольника служили въ нихъ сходственными отрѣзками, то площадь фигуры (C), построенной на гипотенузѣ, равновелика суммѣ площадей фигуръ ($A+B$), построенныхъ на катетахъ». Справедливость этого предложенія легко провѣрить, если вспомнимъ, что площади подобныхъ фигуръ относятся, какъ квадраты сходственныхъ отрѣзковъ:

$$A : B : C = a^2 : b^2 : c^2,$$

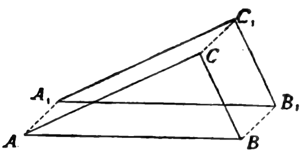
откуда $$\frac{A+B}{C} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = 1,$$ что даетъ:

$$A + B = C.$$

Такъ какъ всѣ квадраты подобны между собой, то теорема Пиѳагора заключается здѣсь, какъ частный случай.

Другимъ частнымъ случаемъ является извѣстная теорема о «Гиппократовыхъ луночкахъ», основанная на томъ, что всѣ окружности подобны между собой, при чемъ за сходственные отрѣзки можно принять діаметры.

Существуетъ нѣсколько теоремъ, аналогичныхъ Пиѳагоровой. Изъ планиметрическихъ упомянемъ теорему Паппа Александрійскаго (III в. по Р. Хр.): «если какой угодно треугольникъ ABC перенесенъ параллельно себѣ въ положеніе $A_1B_1C_1$ такъ, что оба параллелограмма ACC_1A_1 и CBB_1C_1 лежатъ внѣ треугольника ABC *), то параллелограммъ ABB_1A_1 равновеликъ суммѣ параллелограммовъ ACC_1A_1 и CBB_1C_1».—Теорема сразу доказывается тѣмъ, что отъ 5-угольника $AA_1C_1B_1B$ отнимаемъ одинъ разъ $\triangle ABC$, а другой разъ—равный ему $\triangle A_1B_1C_1$.



Черт. 136.

Въ частности, если уголъ C прямой и параллелограммъ ABB_1A_1 есть квадратъ, то нетрудно показать, что параллелограммы ACC_1A_1 и CBB_1C_1 равновелики квадратамъ катетовъ—получается Пиѳагорова теорема.

Другую аналогію заимствуемъ изъ стереометріи. Предварительно напомнимъ о характерѣ нѣкоторыхъ основныхъ аналогій между плоскими и пространственными фигурами.

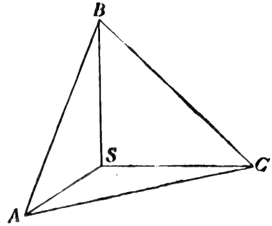
---

*) Можно было бы этого условія, нѣсколько искусственнаго, не ставить, но тогда мы могли бы только утверждать, что

$$\pm \text{ пл. } ABB_1A_1 = \pm \text{ пл. } ACC_1A_1 \pm \text{ пл. } CBB_1C_1,$$

гдѣ передъ каждой площадью берется знакъ $+$ или $-$, смотря по тому, будемъ ли мы при обходѣ параллелограмма въ направленіи, указываемомъ нашимъ порядкомъ буквъ (напр. для перваго параллелограмма—отъ A черезъ B и B_1 къ A_1) двигаться противъ часовой стрѣлки или по ней.

1) Прямому углу въ плоскости аналогиченъ въ пространствѣ такъ называемый «трегранный трижды прямой уголъ», т.-е. трегранный уголъ, составленный тремя плоскими прямыми углами. Таковъ, напр., уголъ, образуемый тремя Декартовыми осями координатъ въ пространствѣ (въ то время, какъ координатныя оси на плоскости образуютъ плоскій прямой уголъ); трегранный уголъ при любой изъ 8-ми вершинъ куба (въ то время, какъ у квадрата — аналогичной плоской фигуры — уголъ при вершинѣ плоскій прямой) и т. п.



Черт. 137.

2) Аналогіей къ треугольнику—фигурѣ, имѣющей наименьшее число сторонъ, служитъ въ пространствѣ пирамида—фигура, имѣющая наименьшее число граней. Если теперь вспомнимъ, что за мѣру стороны (отрѣзка) можно принять ея длину, а у грани (треугольника или многоугольника) ея площадь, то подмѣтимъ аналогію съ Пиѳагоровой въ слѣдующей стереометрической теоремѣ: «если въ пирамидѣ одинъ изъ трехгранныхъ угловъ (напр. уголъ при вершинѣ S) трижды прямой, то квадратъ площади той грани, которая противолежитъ этому углу, равенъ суммѣ квадратовъ площадей остальныхъ трехъ граней».

Обратная теорема. Пиѳагоровы числа.

Справедлива и теорема, обратная Пиѳагоровой: «если квадратъ одной изъ сторонъ треугольника равенъ суммѣ квадратовъ двухъ другихъ сторонъ, то тр-къ прямоугольный (именно—прямой уголъ лежитъ противъ первой стороны)». Доказать это проще всего отъ противнаго, пользуясь теоремами о квадратѣ стороны, лежащей противъ остраго или тупого угла.

Какъ упоминалось выше, этой обратной теоремой пользовались уже древніе; они знали, что, имѣя три числа, изъ которыхъ квадратъ одного равенъ суммѣ квадратовъ двухъ другихъ, можно построить прямоугольный треугольникъ, принявъ эти

числа за длины сторонъ. Такія три цѣлыхъ положительныхъ числа, которыя, очевидно, должны удовлетворять уравненію

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad ...(1),$$

называются «Пиѳагоровыми числами». Поставимъ себѣ задачу: найти всѣ Пиѳагоровы числа, т.-е. дать общія формулы для рѣшенія въ цѣлыхъ положительныхъ числахъ неопредѣленнаго ур-ія (1). Мы можемъ ограничить свою задачу разысканіемъ только такихъ троекъ рѣшеній—такъ наз. «основныхъ троекъ»,— которыя не имѣютъ общаго дѣлителя (какъ, напр., Пиѳагоровы тройки «3, 4, 5» или «5, 12, 13»). Имѣя такую основную тройку, можно получить сколько угодно «производныхъ» Пиѳагоровыхъ троекъ путемъ умноженія на произвольное цѣлое число (напр., изъ тройки «3, 4, 5» можемъ получить, умножая послѣдовательно на 2, 3, 4..., тройки «6, 8, 10», «9, 12, 15», «12, 16, 25» и т. д.), потому что изъ ур-ія (1) слѣдуетъ, что

$$(ax)^2 + (ay)^2 = (az)^2,$$

гдѣ a—какое угодно число.

Теперь приступимъ къ самому рѣшенію. Изъ ур-ія (1) видно, что

$$x < z < x + y, \text{ потому что } x^2 < z^2 < x^2 + y^2 + 2xy.$$

Отсюда заключаемъ, что $z = x +$ нѣкоторая часть числа y, т. е.

$$z = x + \frac{m}{n} y, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

гдѣ $\frac{m}{n}$ правильная дробь ($n > m$), которую можно считать уже сокращенной (m и n не имѣютъ общаго дѣлителя). Подставляя значеніе z изъ (2) въ (1), послѣдовательно найдемъ:

$$x^2 + y^2 = (x + \frac{m}{n} y)^2; \quad y^2 = 2\frac{m}{n} xy + \frac{m^2}{n^2} y^2,$$

откуда, по освобожденіи отъ знаменателя и сокращеніи на y ($\neq 0$), получимъ

$$n^2y = 2mnx + m^2y; \quad \frac{x}{y} = \frac{n^2 - m^2}{2mn} \quad \dots \dots \dots \quad (3)$$

Опредѣляя отсюда x и подставляя въ (2), найдемъ, что

$$\frac{z}{y} = \frac{n^2 + m^2}{2mn} \quad \dots \dots \dots \quad (4)$$

Равенства (3) и (4) можно записать вмѣстѣ въ видѣ

$$x : y : z = (n^2 - m^2) : 2mn : (n^2 + m^2) \quad \dots \dots \quad (5)$$

откуда заключаемъ: если x, y и z суть Пиѳагоровы числа, то они пропорціональны тремъ величинамъ

$$n^2 - m^2, \ 2mn, \ n^2 + m^2, \quad \dots \dots \quad (6)$$

гдѣ m и n нѣкоторыя (взаимно простыя) цѣлыя числа. Обратно, если выполняется соотношеніе (5), то

$$\frac{x^2 + y^2}{z^2} = \frac{(n^2 - m^2)^2 + (2mn)^2}{(m^2 + n^2)^2} = 1,$$

слѣд. удовлетворяется ур-іе (1). Итакъ, формула (5) содержитъ самое общее рѣшеніе нашей задачи: давая числамъ m и n всевозможныя цѣлыя значенія, мы исчерпаемъ всѣ существующія Пиѳагоровы тройки.

Посмотримъ, не можетъ ли быть сокращено отношеніе $(n^2 - m^2) : 2mn : (n^2 + m^2)$ при m и n взаимно простыхъ. Предположимъ, что числа (6) имѣютъ общ. наиб. дѣлителя d, такъ что

$$n^2 - m^2 = dp, \ 2mn = dq, \text{ и } n^2 + m^2 = dr,$$

откуда, складывая и вычитая первое и третье равенства,

$$2n^2 = d(p + r), \ 2m^2 = d(r - p).$$

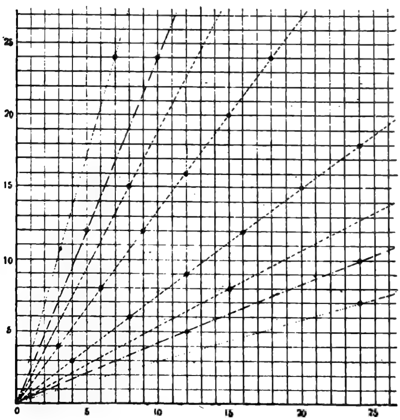
Но n съ m, а слѣд. и n^2 съ m^2 числа взаимно простыя, а потому для d, кромѣ 1, возможно только значеніе 2. Итакъ, при m и n взаимно-простыхъ, числа (6) даютъ либо сразу основную тройку,

либо такую производную, которая переходитъ въ основную послѣ раздѣленія на 2. Легко видѣть, что послѣдній случай будетъ имѣть мѣсто тогда и только тогда, когда оба числа m и n нечетныя; поэтому, если желаемъ получать только основныя тройки, слѣдуетъ не давать числамъ m и n одновременнаго нечетныхъ значеній.

Слѣдующая таблица содержитъ всѣ основныя Пиѳагоровы тройки, заключающіяся въ предѣлахъ первой сотни.

n	2	3	4	4	5	5	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9
m	1	2	1	3	2	4	1	5	2	4	6	1	3	5	2	4
x	3	5	15	7	21	9	35	11	45	33	13	63	55	39	77	65
y	4	12	8	24	20	40	12	60	28	56	84	16	48	80	36	72
z	5	13	17	25	29	41	37	61	53	65	85	65	73	89	85	97

Чтобы дать наглядную картину распредѣленія Пиѳагоровыхъ чиселъ, воспользуемся методомъ координатъ. На клѣтчатую бумагу, гдѣ сторона каждой клѣтки изображаетъ единицу, нанесемъ взаимно перпендикулярныя оси. Теперь каждая Пиѳагорова тройка (основная или производная) можетъ быть изображена точкой, у которой абсцисса и ордината представляютъ катеты, а слѣд. разстояніе точки отъ начала координатъ—гипотенузу соотвѣтствующаго Пиѳагорова треугольника. На чертежѣ мы ограничились значеніями x и y, не превышающими 25; конечно при дальнѣйшемъ расширеніи координатной плоскости появятся новыя (въ числѣ ихъ и основныя) точки, и прямыя, соединяющія



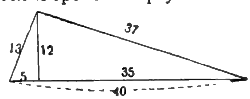
Черт. 138.

ихъ съ началомъ координатъ будутъ становиться все гуще. Двѣ геометрическія детали нашего чертежа сразу бросаются въ глаза.

1) Всѣ производныя отъ данной основной тройки изображаются точками, лежащими на одной прямой—именно на лучѣ, соединяющемъ начало координатъ съ точкой, изображающей основную тройку.—Это явленіе станетъ понятнымъ, если вспомнимъ, что Пиѳагоровъ $\triangle$-къ, соотвѣтствующій производной тройкѣ, подобенъ (вслѣдствіе пропорціональности сторонъ) $\triangle$-ку, соотвѣтствующему исходной основной тройкѣ.

2) Всѣ отмѣченныя точки расположены симметрично по отношенію къ биссектриссѣ угла между осями.—Это объясняется тѣмъ, что каждая тройка a, b, c, изображена у насъ дважды: одна точка соотвѣтствуетъ порядку катетовъ $(a;b)$ а другая порядку $(b;a)$ (напр., точки съ координатами 3, 4 и 4, 3). Эти-то двѣ точки и симметричны всегда по отношенію къ биссектриссѣ.

Въ тѣсной связи съ Пиѳагоровыми находятся «Героновы» треугольники; такъ называются косоугольные $\triangle$-ки, у которыхъ стороны и площадь выражаются цѣлыми числами. Если возьмемъ два Пиѳагоровыхъ $\triangle$-ка, имѣющихъ по одинаковому катету, то, приложивъ ихъ другъ къ другу этими катетами, получимъ Героновъ $\triangle$-къ.*). Такъ, изъ Пиѳагоровыхъ треугольниковъ со сторонами 5, 12, 13 и 35, 12, 37 получимъ $\triangle$-къ со сторонами 13, 37, 40 и высотой 12; площадь этого $\triangle$-ка$=\dfrac{12 \,.\, 40}{2}=240$.



Черт. 139.

Но не только изъ такихъ, а изъ любыхъ двухъ Пиѳагоровыхъ $\triangle$-ковъ можно составить Героновъ; для этого достаточно уравнять по одному катету въ томъ и другомъ Пиѳагоровомъ $\triangle$-кѣ, умножая стороны ихъ на подходящія числа (напр., переходя отъ основныхъ троекъ къ производнымъ).

Такъ, изъ Пиѳагоровыхъ $\triangle$-ковъ «8, 15, 17» и «20, 21, 29» можно получить (уравнивая числа 8 и 20) два другихъ: «40, 75, 85» и «40, 42, 58», а изъ послѣднихъ составить Героновъ треугольникъ.

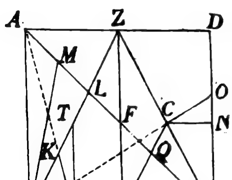
---

*) Можно показать, что, несмотря на присутствіе въ формулѣ площади дѣлителя 2, площадь Геронова $\triangle$-ка всегда будетъ выражаться цѣлымъ числомъ. Причина этого заключается въ томъ, что изъ двухъ катетовъ Пиѳагорова $\triangle$-ка одинъ долженъ непремѣнно выражаться четнымъ числомъ.

Складываніе и переложеніе фигуръ.

Задачи на складываніе и переложеніе фигуръ сводятся къ слѣдующимъ двумъ основнымъ типамъ:

1) *Изъ данныхъ фигуръ* F_1, $F_2, \ldots F_n$ *сложить данную фигуру* F. Придумать такую задачу очень нетрудно: достаточно какъ-нибудь разрѣзать фигуру F на части, перемѣшать ихъ— и задача будетъ состоять въ томъ, чтобы изъ этихъ частей вновь возстановить фигуру F. Подобными «геометрическими головоломками» занимались еще римляне, которые приписывали Архимеду слѣдующую задачу («Архимедовъ loculus»):

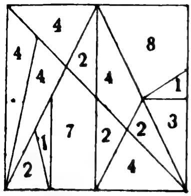


Черт. 140.

«Квадратъ разрѣзанъ прямыми линіями на 14 частей; требуется изъ этихъ частей (данныхъ, конечно, въ безпорядкѣ) вновь составить квадратъ». Способъ разрѣза квадрата показанъ на черт. 140, для уясненія котораго достаточно сказать, что точки E, N, Z, C, H, T и M, являются соотвѣтственно срединами отрѣзковъ BC, DG, AD, LG, BE, BZ и AL; пунктиромъ отмѣчены, линіи, по которымъ разрѣзъ не производится (ср. черт. 141).

На первый взглядъ Архимедовъ способъ разложенія квадрата кажется совершенно случайнымъ,—однако въ немъ есть руководящая идея. Великій геометръ ставилъ себѣ задачей разложить квадратъ не просто на 14 частей, а на 14 частей, площади которыхъ находились бы въ *раціональныхъ отноше-*

ніяхъ къ площади всего квадрата (т.-е. выражались бы дробями отъ этой площади). Дѣйствительно, можно показать, что если площадь квадрата принять за 1, то площади составляющихъ частей, получившихся у Архимеда, выразятся дробями съ общимъ знаменателемъ 48. На черт. 141 показаны величины этихъ площадей въ 48-ыхъ доляхъ (напр. величина площади, помѣченной цифрой 4, есть $\frac{4}{48}=\frac{1}{12}$).



Черт. 141.

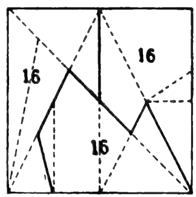
Отсюда слѣдуетъ цѣлый рядъ разнообразныхъ задачъ, напр. такой: «распредѣлить 14 частей квадрата въ три группы такъ, чтобы сумма площадей во всѣхъ группахъ была одинакова». Легко видѣть, что задача эта приводитъ къ рѣшенію въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ системы неопредѣленныхъ уравненій

$$\begin{aligned}
\frac{1}{48}x + \frac{2}{48}y + \frac{3}{48}z + \frac{4}{48}u + \frac{7}{48}v + \frac{8}{48}w &= \frac{1}{3}\\
\frac{1}{48}x_1 + \frac{2}{48}y_1 + \frac{3}{48}z_1 + \frac{4}{48}u_1 + \frac{7}{48}v_1 + \frac{8}{48}w_1 &= \frac{1}{3}\\
\frac{1}{48}x_2 + \frac{2}{48}y_2 + \frac{3}{48}z_2 + \frac{4}{48}u_2 + \frac{7}{48}v_2 + \frac{8}{48}w_2 &= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

при условіяхъ

$$\begin{aligned}
&x+x_1+x_2=2, \quad y+y_1+y_2=4, \quad z+z_1+z_2=1,\\
&u+u_1+u_2=5, \quad v+v_1+v_2=1, \quad w+w_1+w_2=1,
\end{aligned}$$

(такъ какъ въ нашемъ распоряженіи 2 фигуры съ площадью въ $\frac{1}{48}$, 4—съ площадью въ $\frac{2}{48}$ и т. д.). Задача имѣетъ много — однако, конечное число— рѣшеній. На черт. 142 представлено одно изъ нихъ, которое отличается тѣмъ, что эта группировка не нарушаетъ расположенія частей, составляющихъ квадратъ.



Черт. 142.

Вернемся къ общей задачѣ. Очевидно, не при всякомъ заданіи фигуръ $F, F_1, F_2 \ldots F_n$ задача возможна. Однако, доказано, что въ случаѣ прямолинейныхъ фигуръ (т. е. многоугольниковъ) — а только о нихъ и будетъ рѣчь въ дальнѣйшемъ—достаточно произвести конечное число цѣлесообразныхъ испытаній для того, чтобы рѣшить, возможна ли задача или нѣтъ*). Чтобы имѣть возможность рѣшить задачу въ любомъ случаѣ, намъ должно быть дано еще право разрѣзывать на части фигуры $F_1, F_2, \ldots F_n$. Но здѣсь мы уже подходимъ ко второй основной задачѣ:

*) См. Фурре, прибавленіе, стр. 51.

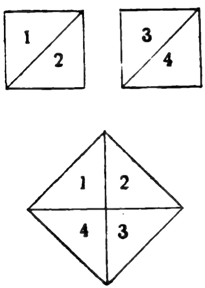
2) *Данную фигуру F разрѣзать* (по прямымъ линіямъ) *на части такъ, чтобы изъ нихъ можно было сложить другую данную фигуру F'.*

Процессъ разрѣзанія фигуры F и складыванія изъ ея частей фигуры F' мы будемъ называть для краткости «перекраиваніемъ фигуры F въ F'». Эта задача имѣетъ уже значительный теоретическій интересъ и разрѣшена вполнѣ лишь очень недавно. Одно необходимое условіе возможности нашей задачи сразу бросается въ глаза—это равновеликость фигуръ F и F'. Дальше будетъ показано, что это условіе и достаточно, то есть, если прямолинейныя фигуры F и F' равновелики, то всегда можно перекроить одну изъ нихъ въ другую. Прежде, чѣмъ перейти къ общей теоріи, разсмотримъ нѣсколько примѣровъ.

Задача I. *Составить квадратъ изъ n данныхъ квадратовъ.*

Достаточно рѣшить задачу для случая $n=2$; если мы сумѣемъ любые два квадрата перекроить въ одинъ, то сумѣемъ это же сдѣлать и съ любымъ числомъ n такихъ квадратовъ. Поэтому положимъ, что намъ даны два квадрата, одинъ со стороной a, а другой съ b; требуется перекроить ихъ въ одинъ.

Если $a=b$*), то задача рѣшается очень просто; разрѣзаемъ каждый изъ данныхъ квадратовъ по діагоналямъ и полученные 4 прямоугольныхъ $\triangle$-ка складываемъ, какъ показано на черт. 143.



Черт. 143.

Если же $a>b$, то поступаемъ слѣдующимъ образомъ: накладываемъ меньшій квадратъ на большій такъ, чтобы совпали прямые углы при вершинѣ A (черт. 144); затѣмъ производимъ разрѣзъ въ большемъ квадратѣ по линіямъ AK, AH, FH, KL, а въ меньшемъ квадратѣ—по линіи AL. Тогда

*) Можно было бы и не выдѣлять этого случая, такъ какъ онъ содержится, какъ предѣльный въ общемъ (когда $a>b$). Предлагаемъ читателю уяснить себѣ, къ какому расположенію стремятся линіи чертежа 144, когда разность $a-b$ приближается къ 0.

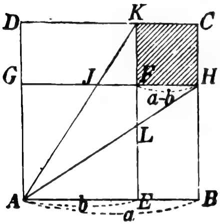
1) $\triangle$ AHB изъ большаго квадрата,

2) $\triangle$ ADK » » »

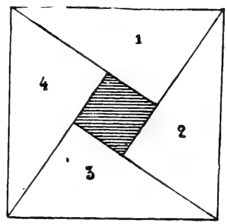
3) $\triangle$ ALK изъ большаго квадрата, вмѣстѣ съ $\angle ALE$ изъ меньшаго,

и 4) $\triangle$ FLH изъ большаго квадрата вмѣстѣ съ трапеціей $ALFG$ изъ меньшаго

дадутъ 4 равныхъ между собой прямоугольныхъ $\triangle$-ка, которые помѣтимъ цифрами 1, 2, 3 и 4. Теперь остается обложить квадратъ $KFHC$ (составляющій часть квадрата $ABCD$, до сихъ поръ не использованную) этими четырьмя $\triangle$-ками, какъ показано на чертежѣ,—получится квадратъ, который и будетъ искомымъ*).



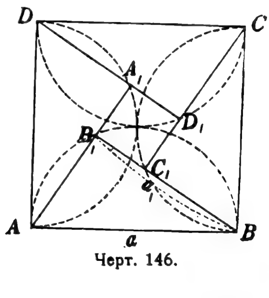
Черт. 144.



Черт. 145.

Задача 2 (*обратная*). *Разложить данный квадратъ на n квадратовъ.*

Задача будетъ опредѣленной только въ томъ случаѣ, если для $n-1$ изъ n искомыхъ квадратовъ указаны стороны: $a_1, a_2, \dots a_{n-1}$. Если при этомъ $a_1^2+a_2^2+\dots+a^2_{n-1}<a^2$, гдѣ a — сторона даннаго квадрата, то рѣшеніе всегда существуетъ.



Черт. 146.

Задача, очевидно, приводится къ простѣйшему случаю — разложенію квадрата со стороной a на два, изъ которыхъ одинъ имѣетъ данную сторону $a_1=BB_1$.—На сторонахъ разлагаемаго квадрата, какъ на діа-

*) Ср. статью о Пиѳагоровой теоремѣ, черт. 127. Легко видѣть, что мы использовали здѣсь идею индусскаго доказательства.

метрахъ, строимъ полуокружности (имѣющія общую точку въ центрѣ квадрата) и затѣмъ изъ вершинъ A, B, C и D радіусомъ, равнымъ a_1, дѣлаемъ засѣчки A_1, B_1, C_1 и D_1. Проведя соединительныя линіи, указанныя на чертежѣ, получимъ такую же фигуру, какъ и на черт. 144. Далѣе выполняемъ въ обратномъ порядкѣ построеніе предыдущей задачи.

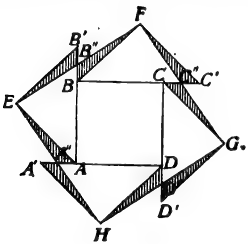
Изложенный общій методъ преобразованія квадратовъ не всегда даетъ кратчайшій путь къ рѣшенію задачи. Въ частности, когда составляющіе квадраты равны между собой, возможны иногда болѣе простыя рѣшенія, къ изложенію которыхъ мы и перейдемъ.

Задача 3. *Составить квадратъ изъ n равныхъ квадратовъ.*

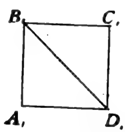
Разсмотримъ сначала частные случаи.

1) $n=2$. Этотъ случай нами уже разобранъ (см. зад. 1, черт. 143.)

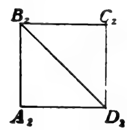
2) $n=3$. Здѣсь интересное рѣшеніе принадлежитъ арабскому архитектору-геометру Абу'ль Уафа (X в. по Р. Х.), которому пришлось столкнуться съ практической задачей: «разрѣзать три одинаковыхъ квадратныхъ плитки такъ, чтобы изъ частей можно было составить квадратъ». Вотъ какое рѣшеніе далъ Абу'ль Уафа.



Черт. 147.



Черт. 148.



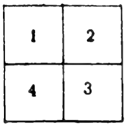
Черт. 149.

Пусть $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ данные квадраты. Разрѣжемъ два изъ нихъ діагоналями на 4 равныхъ $\triangle$-ка и эти послѣдніе обложимъ вокругъ третьяго квадрата, какъ показываетъ чертежъ. Проведя вспомогательныя линіи EF, FG, GH и HE, легко доказать, что всѣ заштрихованные на чертежѣ $\triangle$-ки равны между собой и что $EFGH$ есть квадратъ. Мы можемъ получить этотъ квадратъ, перенеся $\triangle$-ки $EB''B'$, $FC''C$, и т. д. въ положенія $BB''F$, $CC''G$ и т. д. При этомъ не приходится

прибѣгать къ перевертыванію $\triangle$-ковъ другой стороной, такъ что, если, напр., три малыхъ квадратныхъ плитки были окрашены съ одной стороны, то окрашеннымъ получится и составной квадратъ (что, вѣроятно, играло роль въ архитектурѣ).

3) $n=4$. Складываемъ данные 4 квадрата, какъ показано на чертежѣ.

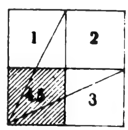
Вообще, нѣтъ ничего легче, какъ составить квадратъ изъ k^2 (напр. изъ 9, 16, 25...) квадратовъ; для этого нѣтъ надобности разрѣзывать послѣдніе; достаточно сложить ихъ такъ, чтобы k квадратовъ укладывалось по длинѣ и k по ширинѣ. Примемъ теперь во вниманіе замѣчательное свойство цѣлыхъ чиселъ, указанное Ферматомъ и состоящее въ томъ, что «всякое цѣлое положительное число n можетъ быть представлено въ видѣ суммы четырехъ или меньшаго числа (трехъ, двухъ, одного) квадратовъ»; иначе, всегда можно подыскать цѣлыя числа x, y, z и u такъ, чтобы $n=x^2+y^2+z^2+u^2$, гдѣ $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$, $u\geq 0$ (если нѣкоторыя изъ этихъ чиселъ равны 0, то слагаемыхъ получается меньше, чѣмъ 4, напр. $30=1^2+2^2+5^2$, $13=2^2+3^2$, $9=3^2$, но число 39, напр., можетъ быть уже разложено на 4 квадрата: $39=1^2+1^2+1^2+6^2$); тогда получимъ общій методъ для сокращеннаго рѣшенія нашей задачи при любомъ n.



Черт. 150.

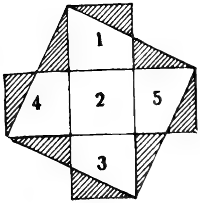
Разлагаемъ число n на слагаемыя x^2, y^2, z^2 и u^2; соединяемъ x^2 изъ данныхъ квадратовъ въ одинъ, y^2 квадратовъ въ другой и т. д.; получаемъ 4, а если среди величинъ x, y, z и u есть нули, то меньшее число, квадратовъ, которое остается сложить по правиламъ зад. 1. Мы сейчасъ пояснимъ этотъ методъ на случаѣ $n=5$.

4) $n=5$. Такъ какъ $5=4+1$, то складываемъ сначала 4 изъ данныхъ квадратовъ (помѣченные цифрами 1, 2, 3, 4) въ одинъ; затѣмъ по правиламъ зад. 1 накладываемъ 5-ый квадратъ на какой-либо другой, напр. на 4-ый, и производимъ разрѣзы, какъ указано на черт. 151 (ср. черт. 144). Легко видѣть, что при этомъ 1) квадратъ 2 останется неразрѣзаннымъ,



Черт. 151.

2) каждый изъ остальныхъ 4 квадратовъ разрѣзается на двѣ части по образцу, указываемому на черт. 153, гдѣ M средина стороны.



Черт. 152.

Черт. 153.

Этому рѣшенію придаютъ обыкновенно нѣсколько иную форму (извѣстная задача: «перекроить крестъ въ квадратъ»), имѣющую преимущество въ симметричности чертежа: складываемъ 5 данныхъ квадратовъ крестообразно; послѣ надлежащихъ разрѣзовъ и перенесенія заштрихованныхъ треугольниковъ, получается квадратъ (черт. 152).

Общую теорію перекраиванія фигуръ изложить нетрудно, если установить основной принципъ и два основныхъ построенія.*).

Основной принципъ. *Если каждую изъ двухъ фигуръ F_1 и F_2, взятыхъ порознь, можно перекроить въ фигуру F, то фигуру F_1 можно перекроить въ F_2* (и обратно—F_2 въ F_1).

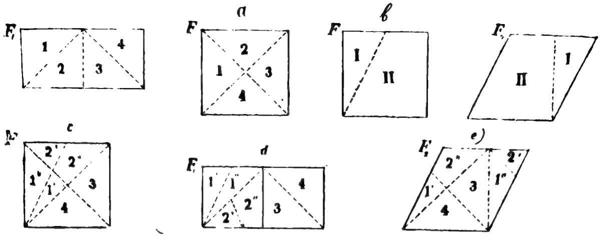
Доказательство основывается на томъ, что способность одной фигуры перекраиваться въ другую есть свойство

1) *обратимое* (или взаимное); если можно перекроить F_1 въ F_2, то и обратно—можно перекроить F_2 въ F_1. Напримѣръ крестообразную фигуру черт. 152 можно перекроить въ квадратъ; обратно, если изъ большого квадрата вырѣзать заштрихованныя части и перенести ихъ, какъ показываетъ чертежъ, то получится первоначальная крестообразная фигура;

2) *переносное* (или транзитивное); если можно перекроить фигуру F_1 въ F, а F въ F_2, то можно перекроить F_1 въ F_2. Напр., (черт. 154), прямоугольникъ F_1, у котораго основаніе вдвое больше высоты, можетъ быть перекроенъ въ квадратъ F при помощи разрѣзовъ, ука-

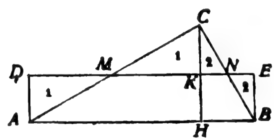
*) Предлагаемая теорія въ основныхъ чертахъ принадлежитъ С. О. Шатуновскому (см. Фурре, прибавленіе).

занныхъ пунктиромъ. Квадратъ F (третій слѣва квадратъ въ первомъ ряду) можетъ быть въ свою очередь перекроенъ въ параллелограммъ F_2 при помощи разрѣза, отмѣченнаго



Черт. 154.

пунктиромъ. Чтобы выяснить, какіе разрѣзы надо произвести въ прямоугольникѣ F_1 для того, чтобы изъ полученныхъ частей можно было составить параллелограммъ F_2, наложимъ фиг. a на фиг. b—получится фигура c. Теперь ясно, что если бы мы съ самаго начала произвели въ прямоугольникѣ F_1, кромѣ прежнихъ разрѣзовъ, еще разрѣзы, указанные пунктиромъ (см. d), то изъ шести частей $1'$, $1''$, $2'$, $2''$, 3 и 4 могли бы сразу сложить параллелограммъ F_2 (см. e).—Вернемся къ доказываемому предложенію. Такъ-какъ, по условію, можно перекроить F_2 въ F, то (въ силу свойства 1) можно перекроить F въ F_2, но, по условію, можно перекроить F_1 въ F, слѣд. (въ силу свойства 2) можно перекроить F_1 въ F_2; этимъ «основной принципъ» доказанъ.



Черт. 155.

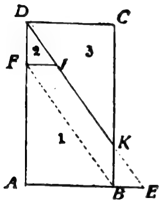
Построеніе I. *Данный треугольникъ перекроить въ прямоугольникъ.*

Задача допускаетъ много рѣшеній; приводимъ одно изъ нихъ. За основаніе даннаго $\triangle$-ка ABC примемъ сторону AB, прилежащую къ острымъ угламъ (см. черт. 155); въ этомъ случаѣ высота CH упадетъ на основаніе (а не на его продолженіе). Проведемъ прямую MN, дѣлящую пополамъ боковыя стороны и, слѣ-

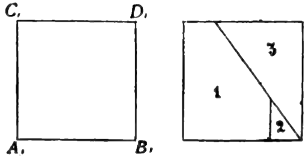
довательно, параллельную основанію. Перенеся теперь $\triangle$-ки CKM и CKN соотвѣтственно въ положенія ADM и BEN, получимъ требуемый прямоугольникъ $ABED$.

Построеніе II. *Даны два равновеликихъ прямоугольника, перекроить одинъ въ другой* *).

Пусть данные прямоугольники будутъ $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Одна изъ сторонъ перваго прямоугольника должна быть меньше одной изъ сторонъ второго; если бы каждая изъ сторонъ перваго прямоугольника была больше каждой изъ сторонъ второго, то площадь перваго была бы больше площади второго, что противно условію. Пусть $AB < A_1B_1$; предположимъ сначала, что сторона A_1B_1 первосходитъ сторону AB не больше, чѣмъ въ 2 раза, т.-е. что



Черт. 156.



Черт. 157.

$$AB < A_1B_1 \leq 2\ AB \ldots (1).$$

Продолжимъ сторону AB (до точки E) на разстояніе, равное A_1B_1 и проведемъ $BF \parallel ED$ и $FJ \parallel AB$. Въ силу соотношенія (1), отрѣзокъ FJ, равный разности BE основаній прямоугольниковъ, не превосходитъ длины основанія AB, а потому $\triangle DFJ$ помѣщается внутри прямоугольника $ABCD$. Произведемъ теперь разрѣзъ прямоугольника $ABCD$ по линіямъ DK и FJ. Если полученныя части 1, 2 и 3 размѣстимъ, какъ показываетъ вторая

*) Задачу можно формулировать еще такъ: «данный прямоугольникъ перекроить въ другой, съ даннымъ основаніемъ». Дѣйствительно, высоту второго прямоугольника мы сами построимъ, какъ 4-ую пропорціональную къ двумъ сторонамъ даннаго прямоугольника и данному основанію искомаго.

фигура чертежа 157, то получимъ прямоугольникъ, равный прямоугольнику $A_1B_1C_1D_1$.

Если бы основаніе A_1B_1 болѣе, чѣмъ въ два раза превышало основаніе AB, то мы могли бы увеличить послѣднее, напр. въ $1^1/_2$ раза (не мѣняя площади прямоугольника $ABCD$), при помощи предыдущаго построенія; затѣмъ, если понадобится, еще въ $1^1/_2$ раза и т. д. до тѣхъ поръ, пока условіе (1) не было бы удовлетворено.

Пусть теперь мы имѣемъ два какихъ угодно равновеликихъ многоугольника F_1 и F_2. Разобьемъ многоугольникъ F_1 на треугольники; треугольники перекроимъ въ прямоугольники (постр. I); послѣдніе—въ прямоугольники съ однимъ и тѣмъ же произвольно-выбраннымъ основаніемъ b (постр. II; см. также выноску къ нему); всѣ эти прямоугольники соединимъ (ставя одинъ на другой) въ одинъ F—съ основаніемъ b. Буквально то же самое (съ тѣмъ же самымъ b) продѣлаемъ съ многоугольникомъ F_2; такъ какъ послѣдній равновеликъ многоугольнику F_1, то получится опять прямоугольникъ F.—Итакъ, многоугольники F_1 и F_2, каждый порознь, перекроены въ прямоугольникъ F, слѣдовательно, въ силу «основного принципа», эти многоугольники могутъ быть перекроены одинъ въ другой.

Какъ уже было упомянуто, полная теорія перекраиванія фигуръ появилась только въ прошломъ столѣтіи, но достояніемъ широкихъ математическихъ круговъ она стала лишь послѣ того, какъ была изложена знаменитымъ нѣмецкимъ математикомъ проф. Гильбертомъ.

Послѣдній обратилъ вниманіе на необходимость рѣшить тотъ же вопросъ въ стереометріи. Другими словами, предстояло выяснить, могутъ ли быть всякіе два равновеликіе многогранника преобразованы одинъ въ другой путемъ разрѣзанія ихъ плоскостями и перекладыванія частей. Рѣшить эту задачу удалось ученику Гильберта, Дену (Dehn). Результатъ получился довольно неожиданный: оказалось, что два равновеликихъ многогранника, *вообще говоря*, не могутъ быть преобразованы одинъ въ другой; это возможно только въ исключительныхъ случаяхъ (Денъ ука-

валъ необходимыя и достаточныя условія перекраиванія). Теперь будетъ понятно, зачѣмъ понадсбилась столь непріятная ученикамъ «лѣстница» въ извѣстномъ доказательствѣ равновеликости пирамидъ. Многіе, вѣроятно, задумывались надъ вопросомъ: зачѣмъ здѣсь вводится понятіе о предѣлѣ? Послѣднее кажется намъ естественнымъ, когда рѣчь идетъ о кривыхъ линіяхъ и поверхностяхъ, потому что эти геометрическіе образы мы мыслимъ, какъ предѣлы прямолинейныхъ и плоскостныхъ фигуръ. Но когда надо доказать равновеликость пирамидъ (съ равновеликими основаніями и равными высотами), почему бы нельзя было одну изъ нихъ разрѣзать плоскостями такъ, чтобы изъ частей ея складывалась другая?

Теперь, послѣ работъ Дена, мы можемъ отвѣтить на этотъ вопросъ (поскольку рѣчь идетъ о доказательствѣ общаго случая) отрицательно.—Это уже не первое изъ «полезныхъ разочарованій», которыя принесла намъ современная математика. Достаточно упомянуть финалъ исторіи задачъ о квадратурѣ круга, трисекціи угла и т. п. Невозможность рѣшить (при помощи циркуля и линейки) эти задачи, поглотившія до того столько энергіи выдающихся математиковъ, была обнаружена лишь въ XIX в. Одинъ изъ величайшихъ математиковъ этого вѣка, Абель, кажется первый высказалъ слѣдующую простую, но необыкновенно плодотворную мысль: прежде чѣмъ изощрять свою находчивость надъ рѣшеніемъ той или другой задачи, надо направить первыя усилія на то, чтобы въ точныхъ выраженіяхъ формулировать задачу, т.-е. перечислить тѣ условія, при которыхъ мы будемъ признавать её рѣшенной, а затѣмъ и выяснить, разрѣшима ли она при этихъ условіяхъ.

Теорія геометрическихъ построеній.

Древніе не выдѣляли теоріи построеній изъ остальной геометрической науки. У Эвклида, на первыхъ страницахъ знаменитыхъ «Началъ», рядомъ съ основными опредѣленіями и аксіомами геометріи помѣщены три «постулата» (т.-е. «требованія»), имѣющіе въ виду исключительно геометрическія построенія. Постулаты эти слѣдующіе.

1. Требуется*), чтобы отъ всякой точки ко всякой другой можно было провести прямую линію.

2. И чтобы ограниченную прямую (отрѣзокъ) можно было продолжить неопредѣленно.

3. И чтобы около всякаго центра можно было провести окружность произвольнымъ радіусомъ.

Съ простѣйшихъ построеній (равносторонняго треугольника, отрѣзка, равнаго данному и т. д.) начинается и I книга «Началъ». Отсюда видно, что Эвклидъ придавалъ этимъ построеніямъ не столько практическое, сколько теоретическое значеніе, разсматривая ихъ, какъ логическій матеріалъ для послѣдующихъ теоремъ.

На практикѣ Эвклидовы постулаты 1—3 осуществляются при помощи двухъ инструментовъ—циркуля и линейки—и въ этомъ смыслѣ могутъ быть названы «постулатами, опредѣляющими средства построенія». Удивительное обстоятельство—столь же необъяснимое, какъ и прозорливость, обнаруженная Эвклидомъ въ теоріи параллельныхъ линій (см. въ этомъ томѣ

*) Текстъ постулатовъ приведенъ въ буквальномъ переводѣ.

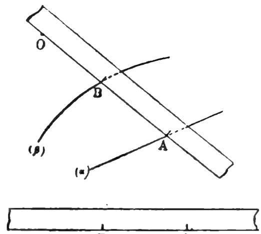
статью о неевклидовой геометріи); выставивъ въ качествѣ основныхъ требованій три «постулата построеній», авторъ «Началъ» предвосхитилъ самую новѣйшую точку зрѣнія на этотъ вопросъ, полагающую, что геометрическая задача на построеніе только тогда имѣетъ смыслъ, когда указаны средства (на практикѣ—инструменты) построенія, при чемъ средства эти должны опредѣляться особыми постулатами *).

Но, можетъ быть, своими тремя постулатами Эвклидъ оказалъ и плохую услугу наукѣ. Не его ли подавляющему авторитету (подвергшемуся критикѣ лишь въ послѣднее время) мы обязаны тѣмъ упорствомъ, съ какимъ геометры въ теченіе столѣтій отказывались признать за «настоящее» всякое построеніе, осуществляемое иными инструментами, кромѣ циркуля и линейки, и старались разрѣшить этими традиціонными средствами *любую* задачу на построеніе, тратя свои подчасъ геніальныя усилія на безнадежную, как показала современная наука, работу? Чѣмъ, напр., эллипсографъ (приборъ, вычерчивающій эллипсы) въ практическомъ и теоретическомъ отношеніи хуже циркуля? Между тѣмъ, уже первые греческіе геометры знали, что стоитъ ввести въ построеніе нѣкоторыя простѣйшія кривыя, какъ многія неразрѣшенныя до того (и, какъ теперь выяснилось, *неразрѣшимыя* циркулемъ и линейкой) задачи уже не представляютъ никакихъ затрудненій. Такъ, *Менехмъ* (ок. 300 л. до Р. Х.) зналъ, что знаменитая въ то время «Делійская задача» (объ удвоеніи куба; см. въ этомъ томѣ «Знаменитыя задачи древности») можетъ быть рѣшена—и даже двумя способами—при помощи параболъ; ту же задачу Никомедъ (ок. 150 л. до Р. Х.) рѣшилъ при помощи спеціально имъ придуманной кривой—такъ называемой «конхоиды», для вычерчиванія которой онъ же построилъ инструментъ. Но признаемъ на время законнымъ недовѣріе нашихъ предковъ къ кривымъ высшаго порядка и къ точности вычерчивающихъ эти кривыя приборовъ. Возьмемъ такой простой инструментъ, какъ обыкновенная линейка (или

---

*) Ср. *В. Адлеръ*, «Теорія геометрическихъ построеній», русск. пер. въ изд. Mathesis, 1910; введеніе редактора стр. I—XIX. Мы горячо рекомендуемъ это введеніе болѣе подготовленному читателю.

полоска бумаги) съ двумя нанесенными на ней тонкими черточками A и B (см. черт. 158). Будемъ этой линейкой пользоваться не для проведенія прямыхъ линій, а напр., для такой операціи: имѣя на чертежѣ двѣ линіи (α) и (β), наложимъ линейку такъ, чтобы черточки A и B (точнѣе—концы этихъ черточекъ, приходящіеся на лезвіи линейки) упали соотвѣтственно на линіи (α) и (β); такъ какъ это можно сдѣлать, вообще говоря, многими способами, то остается мѣсто еще для дополнительнаго условія, напр. чтобы линейка имѣла данное направленіе; чтобы лезвіе ея проходило черезъ данную точку O и т. п. Чтобы выполнить, положимъ, послѣднее условіе, поступаемъ такъ: прикладываемъ линейку лезвіемъ къ точкѣ O, а затѣмъ одновременно 1) сдвигаемъ линейку такъ, чтобы точка O все время оставалась на лезвіи, и 2) вращаемъ ее около точки O, пока не получится требуемое положеніе.



Черт. 158.

Подобная операція, по справедливому замѣчанію Адлера*), является ничуть не менѣе точной, чѣмъ обычныя манипуляціи съ линейкой, потому что, желая, напр., провести прямую черезъ двѣ данныя точки, мы совмѣщаемъ лезвіе линейки съ одной изъ точекъ, а затѣмъ опять-таки вынуждены вращать линейку, пока лезвіе ея не пройдетъ черезъ другую точку.—Есть основаніе думать, что уже Архимедъ (около 250 г. до Р. Х.) зналъ, что при помощи линейки съ двумя черточками можно рѣшить задачу о трисекціи (дѣленіе на три равныя части) угла, а Платонъ (около 400 г. до Р. Х.) умѣлъ рѣшать упомяну-

*) Стр. 122. См. предыдущ. выноску.

тую выше Делійскую задачу при помощи двухъ подвижныхъ наугольниковъ, какими часто пользуются чертежники.

Весьма вѣроятно, что подобныя построенія примѣнялись греческими математиками чаще, чѣмъ мы объ этомъ знаемъ. Такъ, средневѣковый арабскій математикъ Альсинагри (X в. по Р. Х.), въ сочиненіи, посвященномъ трисекціи угла, говоритъ о какой-то «подвижной геометріи» древнихъ. Что Альсинагри разумѣлъ подъ этимъ терминомъ, выясняется изъ слѣдующихъ его словъ, относящихся къ трисекціи угла: «...вопросъ, рѣшенный однимъ изъ древнихъ посредствомъ линейки и *подвижной геометріи*, но который мы должны рѣшить посредствомъ *неподвижной геометріи*». «Одинъ изъ древнихъ», о которомъ говоритъ арабскій математикъ, повидимому, Архимедъ.

Итакъ, поскольку рѣчь идетъ о практическихъ задачахъ геометрическаго черченія, приверженность къ циркулю и линейкѣ не имѣетъ подъ собой почвы. Обращаясь къ теоретической сторонѣ вопроса, слѣдуетъ, конечно, признать, что нежеланіе вводить новый постулатъ является доводомъ серьезнымъ. Но ошибка древнихъ именно въ томъ и заключается, что они, вмѣсто такой широкой постановки вопроса— достаточны ли циркуль и линейка для построенія *всѣхъ* задачъ, или обращеніе къ новымъ средствамъ въ извѣстныхъ случаяхъ неизбѣжно?—изощряли свое остроуміе надъ рѣшеніемъ отдѣльныхъ задачъ традиціонными средствами. Въ настоящее время, трудами геометровъ XIX столѣтія, поставленный выше вопросъ рѣшенъ исчерпывающимъ образомъ, о чемъ рѣчь будетъ впослѣдствіи.

Предварительно дадимъ бѣглый обзоръ различныхъ средствъ соотвѣтствующихъ методовъ построенія.

1. Построенія при помощи циркуля и линейки.

Здѣсь методы наиболѣе разработаны, потому что построенія этими средствами такъ же стары, какъ и сама геометрія. Обзоръ различныхъ методовъ можно найти теперь во

многихъ элементарныхъ учебникахъ*), а тѣмъ болѣе въ спеціальныхъ книгахъ**); мы ограничимся поэтому изложеніемъ главнѣйшихъ и наиболѣе важныхъ въ теоретическомъ отношеніи методовъ.

Методъ геометрическихъ мѣстъ можетъ быть примѣненъ къ задачамъ, формулированнымъ такъ, что искомой является нѣкоторая точка. Пусть положеніе этой точки опредѣляется рядомъ условій A, B, C,... независимыхъ другъ отъ друга (т.-е. такихъ, что ни одно изъ этихъ условій не является слѣдствіемъ другихъ). Откинемъ теперь какое-нибудь условіе, напр. A; тогда остальнымъ условіямъ B, C,... удовлетворяетъ уже не одна, а много точекъ (въ противномъ случаѣ условія B, C... сами по себѣ уже опредѣлили бы положеніе искомой точки и условіе A было бы ихъ слѣдствіемъ), образующихъ, вообще говоря, нѣкоторую линію—«геометрическое мѣсто точекъ, удовлетворяющихъ условіяхъ B, C,...». Равнымъ образомъ, если бы мы, вмѣсто A, откинули условіе B, получилось бы другое геометрическое мѣсто точекъ, удовлетворяющихъ условіямъ A, C... Искомая точка, очевидно, должна лежать на пересѣченіи обоихъ геометрическихъ мѣстъ.

Поскольку мы ограничиваемся циркулемъ и линейкой, методъ геометрическихъ мѣстъ имѣетъ строго ограниченную область примѣненія — геометрическія мѣста, о которыхъ говорилось выше, должны быть либо прямыми, либо окружностями. Напр. построеніе $\triangle$-ка по данному основанію, углу при основаніи и суммѣ боковыхъ сторонъ не можетъ быть выполнено методомъ геометрическихъ мѣстъ, такъ какъ пришлось бы строить эллипсъ.

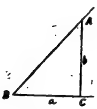
Методъ подобія. Пусть требуется построить фигуру, удовлетворяющую нѣсколькимъ условіямъ. Положимъ, что, откинувъ одно условіе, мы получимъ уже не одну, а безчисленное множество фигуръ, подобныхъ между собой и удовлетворяющихъ остальнымъ требованіямъ. Строимъ любую изъ этихъ фигуръ, а затѣмъ увеличиваемъ или уменьшаемъ ея масштабъ (производимъ такъ

*) Ср., напр., *Киселевъ*, Геометрія.

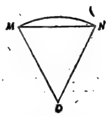
**) На русск. яз.: цитиров. книга *Адлера*, *Александрова*, *Петерсенъ*.

наз. «подобное преобразованіе») такъ, чтобы удовлетворялось и условіе, первоначально нами отброшенное. Методъ подобія обыкновенно является наилучшимъ для тѣхъ задачъ, въ которыхъ одно только данное линейное (отрѣзокъ), а другія— угловыя или числовыя (отношенія отрѣзковъ, площадей).

Алгебраическій методъ («приложеніе алгебры къ геометріи») является наиболѣе общимъ. Онъ основанъ на томъ, что всѣ данныя геометрической задачи обыкновенно можно свести къ извѣстному числу данныхъ отрѣзковъ или отношеній отрѣзковъ. Напр., если данъ уголъ ABC, то можно считать, что дано отношеніе $\frac{b}{a}$ отрѣзковъ $AC=b$ и $BC=a$, гдѣ $AC\perp BC$; если дана дуга окружности, то можно принять данными радіусъ ея и стягивающую дугу хорду и т. п. Если теперь обозначимъ данные отрѣзки буквами a, b, c,..., а искомые буквами x, y, z..., то, пользуясь формулами геометріи, можно (если только задача опредѣленная) связать величины a, b, c,... и x, y, z... уравненіями въ числѣ, достаточномъ для опредѣленія величинъ x, y, z... Рѣшивъ эти уравненія, найдемъ x, y, z,... въ видѣ алгебраическихъ выраженій, составленныхъ изъ буквъ a, b, c,... Если при этомъ полученныя алгебраическія выраженія либо вовсе не содержатъ корней, либо содержатъ только квадратные корни (въ конечномъ числѣ), то отрѣзки x, y, z... могутъ быть построены, такъ какъ построеніе самой сложной формулы указаннаго типа можетъ быть сведено къ послѣдовательному построенію слѣдующихъ шести формулъ:



Черт. 159.



Черт. 160.

$$a+b,\ a-b,\ \frac{ab}{c},\ \sqrt{ab},\ \sqrt{a^2+b^2},\ \sqrt{a^2-b^2};$$

этому учитъ уже элементарная геометрія.

Алгебраическій методъ находитъ себѣ наиболѣе стройное и послѣдовательное выраженіе въ *методѣ координатъ* (т.-е. въ аналитической геометріи). Примѣненіе его основывается на томъ, что всякая задача на построеніе можетъ быть сведена къ такой:

«Даны точки A_1, $A_2 \ldots$, A_n; требуется построить точки X_1, $X_2, \ldots X_m$, связанныя съ данными точками нѣкоторыми условіями».

Что такая формулировка задачи является наиболѣе общей, въ этомъ легко убѣдиться, разобравъ нѣсколько основныхъ случаевъ; напр., если данъ отрѣзокъ прямой, то это равносильно тому, что даны концы его; уголъ опредѣляется взаимнымъ расположеніемъ трехъ точекъ—вершины и двухъ точекъ на каждой изъ сторонъ; дуга окружности также опредѣляется тремя точками—концами дуги и центромъ окружности и т. п. Если теперь возьмемъ въ плоскости чертежа координатныя оси, то координаты

$$(a_1,\ b_1),\ (a_2,\ b_2), \ldots (a_n,\ b_n) \ldots (1)$$

точекъ A_1, $A_2, \ldots A_n$ будутъ данными, а координаты

$$(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2), \ldots (x_m,\ y_m) \ldots (2)$$

точекъ $X_1, X_2, \ldots X_m$—искомыми. Остается связать числа (1) и (2) при помощи $2m$ (таково число неизвѣстныхъ координатъ) уравненій и рѣшить эту систему уравненій. Если задача вообще разрѣшима при помощи циркуля и линейки, то этотъ путь несомнѣнно приведетъ къ цѣли.

На практикѣ обыкновенно не бываетъ надобности приводить всякую задачу къ упомянутой общей формулировкѣ (т.-е. разсматривать всѣ данныя задачи, какъ координаты точекъ), которой мы воспользовались только для изложенія метода въ наиболѣе общемъ видѣ.—Въ качествѣ примѣра рѣшимъ методомъ координатъ слѣдующую задачу *).

Примѣръ. *Данъ уголъ ABC и двѣ точки: N—внѣ угла и M—на одной изъ его сторонъ (BC); требуется на другой сторонѣ (AB) угла найти*

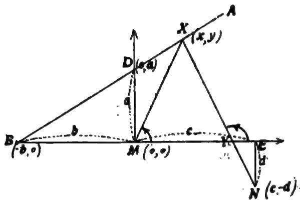
*) Мы считали лишнимъ иллюстрировать примѣрами методы геометрическихъ мѣстъ, подобія и обыкновеннаго приложенія алгебры къ геометріи, т. к. такіе примѣры читатель легко найдетъ въ элементарныхъ учебникахъ.—Приводимая въ текстѣ задача имѣетъ цѣлью дать примѣръ того, какъ при пользованіи методомъ координатъ, ходъ рѣшенія получается естественный; единственный произволъ проявляется въ выборѣ координатныхъ осей, но и при иномъ выборѣ планъ рѣшенія былъ бы тотъ же, усложнились бы только формулы. Чисто геометрическое рѣшеніе той же задачи (см. въ этомъ томѣ «Задачи на построеніе») хотя и быстрѣе приводитъ къ цѣли, но зато страдаетъ искусственностью.

такую точку X, чтобы сторона BC отсѣкала отъ угла MXN равнобедренный треугольникъ MXY ($MX=XY$).

Рѣшеніе. Возьмемъ въ качествѣ прямоугольныхъ осей координатъ прямую BC и перпендикулярную къ ней прямую MD. Тогда координаты точекъ M, D, B, N будутъ соотвѣтственно

$$(0,\ 0),\ (0,\ a),\ (-b,\ 0),\ (c,\ -d),$$

гдѣ a, b, c, d—извѣстныя, въ силу условія, длины отрѣзковъ MD, MB, ME, NE. Обозначая координаты искомой точки X черезъ x и y, выразимъ, что эта точка лежитъ на прямой BA; уравненіе послѣдней написать не трудно, зная отрѣзки, которые эта прямая отсѣкаетъ на осяхъ координатъ; имѣемъ:



Черт. 161.

$$\frac{x}{-b}+\frac{y}{a}=1. \ \ldots(3)$$

Остается выразить аналитически, что $\triangle MXY$ равнобедренный, т-е. что $\angle XMY=\angle XYM$. Это равенство показываетъ, что прямыя MX и YX образуютъ съ положительнымъ направленіемъ оси MC углы CMX и CYX, взаимно дополняющіе другъ друга до 180°, а въ такомъ случаѣ угловые коэффиціенты этихъ прямыхъ равны по абсолютной величинѣ и противоположны по знаку. Угловой коэффиціентъ прямой MX есть $\frac{x}{y}$, а для прямой XY (вычисляемъ по координатамъ точекъ X и N): $\frac{y+d}{x-c}$; слѣд.

$$\frac{y}{x}=-\frac{y+d}{x-c}. \ \ldots(4)$$

Рѣшая совмѣстно уравненія (3) и (4), получимъ для x квадратное уравненіе

$$2ax^2+x(2ab+bd-ac)-abc=0, \ \ldots(5)$$

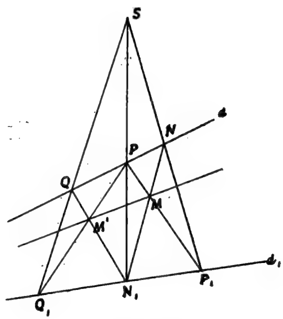
имѣющее вещественные корни: одинъ отрицательный, который, какъ видно изъ чертежа, не годится, а другой положительный, который и дастъ абсциссу искомой точки X.

2. Построенія посредствомъ линейки*) (*Штейнеровы построенія*).

*) Точнѣе—«посредствомъ проведенія однѣхъ лишь прямыхъ линій», т. к. линейка служитъ для этой цѣли только при черченіи на бумагѣ, а въ геодезіи, напр., прямыя линіи строятся при помощи другихъ инструментовъ. Однако мы и въ дальнѣйшемъ будемъ говорить иногда, для сокращенія рѣчи, о построеніяхъ «посредствомъ линейки», понимая это выраженіе въ указанномъ смыслѣ.

Возродившаяся въ концѣ XVIII вѣка синтетическая геометрія*) привлекла вниманіе математиковъ къ ученію о пучкахъ прямыхъ линій, иначе говоря,—къ тѣмъ соотношеніямъ между прямыми, которыя проистекаютъ изъ взаимнаго расположенія послѣднихъ. Было замѣчено, что нѣкоторыя задачи на построеніе могутъ быть рѣшены путемъ проведенія однѣхъ только прямыхъ линій, т.-е. безъ помощи циркуля. Правда, при такомъ добровольномъ ограниченіи, рѣшеніе многихъ задачъ усложнялось—и иногда даже очень значительно,—но зато новый методъ имѣлъ несомнѣнное преимущество въ тѣхъ случаяхъ, гдѣ построеніе требовалось произвести не на бумагѣ, а въ естественномъ большомъ масштабѣ—напр., при геодезическихъ работахъ. Съ практической стороны, новыя изслѣдованія имѣли поэтому въ виду инженеровъ и землемѣровъ.

Примѣръ. *Даны двѣ прямыя d и d_1, точка пересѣченія которыхъ недоступна (напр., находится внѣ листа, предоставленнаго для чертежа). Черезъ данную точку M провести прямую, которая при достаточномъ продолженіи прошла бы черезъ недоступную точку пересѣченія прямыхъ d и d_1.*



Черт. 162.

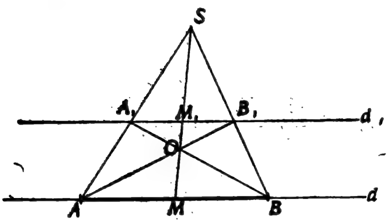
Рѣшеніе. Черезъ точку M проводимъ двѣ произвольныя прямыя NN_1 и PP_1. Изъ точки S, встрѣчи прямыхъ PN_1 и NP_1, проведемъ къ прямымъ d и d_1 сѣкущую SQQ_1. Если теперь точку M' пересѣченія прямыхъ QN_1 и PQ_1 соединимъ съ точкой M, то полученная прямая MM_1 будетъ искомой.—Доказательство непосредственно вытекаетъ изъ теоремы Паппа о полномъ четыреугольникѣ (см. статью «Проективная геометрія»).

Однако циклъ задачъ, которыя могутъ быть рѣшены подобно предыдущей, сравнительно невеликъ; напр., такая элементарная задача, какъ раздѣленіе пополамъ даннаго отрѣзка, уже не можетъ быть рѣшена этими средствами.

*) См. въ этомъ томѣ статьи «Изъ исторіи геометріи» и «Проэктивная геометрія».

Германскій математикъ Штейнеръ, которому и принадлежитъ окончательное рѣшеніе вопроса о построеніяхъ помощью линейки, показалъ, что кругъ задачъ, разрѣшимыхъ путемъ проведенія однѣхъ только прямыхъ линій, сразу расширяется, если въ плоскости чертежа даны (начерчены) нѣкоторыя вспомогательныя фигуры.

Такъ, напр., если въ плоскости чертежа даны двѣ параллельныя между собою прямыя d и d_1, то упомянутая выше задача о раздѣленіи пополамъ отрѣзка легко рѣшается для отрѣзка AB, лежащаго на одной изъ данныхъ прямыхъ (d). Дѣйствительно, возьмемъ внѣ прямыхъ d и d_1 произвольную точку S и соединимъ ее съ концами отрѣзка AB. Пусть прямыя SA и SB пересѣкаютъ прямую d_1 въ точкахъ A_1 и B_1. Проведя въ трапеціи ABB_1A_1 діагонали и соединивъ ихъ точку пересѣченія O съ точкой S, получимъ прямую SO, которая раздѣлитъ отрѣзокъ AB (въ точкѣ M) пополамъ. Въ самомъ дѣлѣ, прямыя SA, SM и SB отсѣкаютъ на параллеляхъ d и d_1 прямо-пропорціональныя части:



Черт. 163.

$$\frac{AM}{MB}=\frac{A_1M_1}{M_1B_1},$$

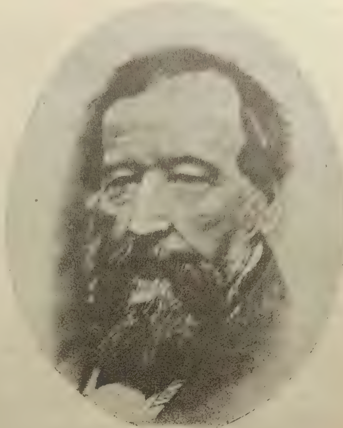
а прямыя OA, OM и OB—обратно пропорціональныя

$$\frac{AM}{MB}=\frac{M_1B_1}{A_1M_1}.$$

Перемножая эти двѣ пропорціи, найдемъ $\frac{AM^2}{MB^2}=1$, откуда $AM=MB$.

Обратно, если въ плоскости чертежа данъ отрѣзокъ AB, раздѣленный пополамъ въ точкѣ M, то этого достаточно для того, чтобы можно было при помощи линейки черезъ любую точку A_1, лежащую внѣ прямой AB, провести къ послѣдней

параллель; такъ какъ точки A, M, B и A_1 даны, то проводимъ (черт. 163) прямыя AA_1, BS_1*) и BA_1, а затѣмъ послѣдовательно — SM, AOB_1, и, наконецъ, прямую A_1B_1, которая будетъ искомой.



Яковъ Штейнеръ.
(1796—1863).

Штейнеръ послѣдовательно принимаетъ за вспомогательную фигуру, данную въ плоскости чертежа, 1) пару параллелей, 2) двѣ пары параллелей (т.-е. параллелограммъ), 3) квадратъ, и, наконецъ, 4) окружность, начерченную въ плоскости вмѣстѣ со своимъ центромъ. При переходѣ отъ одной вспомогательной фигуры къ другой въ томъ порядкѣ, въ какомъ мы ихъ перечислили, циклъ задачъ, допускающихъ рѣшеніе при помощи проведенія однѣхъ только прямыхъ линій, постепенно расширяется—и, наконецъ, въ случаѣ 4) становится разрѣшимой всякая задача, которая допускаетъ рѣшеніе при помощи циркуля и линейки; другими словами, *при производствѣ построеній, можно отказаться отъ циркуля, если въ плоскости чертежа дана окружность со своимъ центромъ.* Эта теорема, высказанная, въ качествѣ предположенія, французскимъ геометромъ Понселе, была доказана спустя десять лѣтъ Штейнеромъ въ его классической работѣ «Die geometrische Konstructionen, ausgeführt mittels der Geraden Linie und eines festen Kreises» (1833).

Біографіи обоихъ упомянутыхъ геометровъ представляются настолько исключительными, что заслуживаютъ быть отмѣченными.—*Понселе*

*) Точка S берется произвольно на прямой AA_1.

въ 1812 г. очутился въ рядахъ Наполеоновской арміи, совершавшей нашествіе на Россію. Послѣ разгрома этой арміи, молодой офицеръ Понселе, въ качествѣ военноплѣннаго, попалъ въ глухую русскую провинцію, настолько отрѣзанную отъ всего культурнаго міра, что память о будущемъ ученомъ была утеряна, и соотечественники считали его погибшимъ. Полунищій, забытый всѣми, окруженный людьми, не понимавшими его языка, Понселе находилъ единственное утѣшеніе въ занятіяхъ математикой, которой онъ уже давно увлекался. Но какъ было заниматься, не имѣя подъ рукой ни одной книги, хотя бы элементарнаго учебника, испытывая порой недостатокъ даже въ письменныхъ принадлежностяхъ. Однако, страстная любовь къ математикѣ и талантъ побѣдили всѣ препятствія; Понселе принялся возстановлять на память всю элементарную геометрію, затѣмъ по обрывочнымъ воспоминаніямъ возстановилъ—точнѣе, вновь открылъ—многое изъ того, что было сдѣлано его предшественниками въ болѣе спеціальныхъ областяхъ; однимъ словомъ, самъ написалъ для себя необходимую справочную библіотечку. Въ этомъ безплодномъ, казалось бы, трудѣ окрѣпъ геній молодого математика и зародились тѣ идеи, которыя сдѣлали его однимъ изъ творцовъ новой синтетической геометріи. Послѣ нѣсколькихъ лѣтъ невольнаго изгнанія Понселе получилъ возможность вернуться на родину и, опубликовавъ свои открытія, сразу привлекъ вниманіе математическаго міра.

Современникъ Понселе, Як. Штейнеръ, родился въ семьѣ швейцарскаго крестьянина. 19-ти лѣтъ отъ роду будущій профессоръ Берлинскаго университета не умѣлъ еще писать. Въ этомъ возрастѣ Штейнеръ попадаетъ въ школу знаменитаго педагога Песталоцци, который обращаетъ вниманіе на выдающіяся математическія способности молодого крестьянина. Вскорѣ Штейнеръ становится учителемъ математики въ той самой школѣ, гдѣ недавно былъ ученикомъ. Въ то же время Штейнеръ усиленно пополняетъ свой математическій запасъ, хотя неотступная матеріальная нужда не позволяетъ ему заниматься систематически. Этимъ послѣднимъ обстоятельствомъ, вѣроятно, объясняется то, что 25-лѣтній Штейнеръ, прибывъ въ Берлинъ, чтобы подвергнуться экзамену на званіе учителя гимназіи, обнаруживаетъ, по отзывамъ испытательной комиссіи, хорошія познанія въ геометріи, но по алгебрѣ не знаетъ дальше квадратнаго уравненія, а по тригонометріи у него мало навыка. Но, какъ и въ случаѣ съ Понселе, никакія препятствія не могли задержать торжества истиннаго таланта; черезъ 12 лѣтъ послѣ неудачнаго экзамена Штейнеръ становится профессоромъ Берлинскаго университета и завоевываетъ себѣ европейски-извѣстное имя. — Печать поздняго и односторонняго развитія лежитъ на произведеніяхъ Штейнера; въ своемъ изложеніи онъ тяготѣетъ къ элементарнымъ методамъ и въ геометріи избѣгаетъ анализа. Но именно это обстоятельство дѣлаетъ нѣкоторыя сочиненія Штейнера доступными даже для малоподготовленнаго читателя; упомянутую въ текстѣ небольшую книжку (есть русскій переводъ: *Якобъ Штейнеръ*, Геометрическія построенія, подъ ред. проф. Д. М. Синцова, Харьковъ, 1910 г.) пойметъ у насъ ученикъ старшихъ классовъ гимназіи.

Основная идея Штейнерова доказательства заключается въ слѣдующемъ: какъ бы сложно ни было рѣшеніе задачи при помощи циркуля и линейки, оно всегда сводится къ повторному примѣненію нѣсколькихъ основныхъ построеній; остается доказать—и это сдѣлано Штейнеромъ—что основныя построенія могутъ быть выполнены и при указанномъ ограниченіи въ средствахъ.—Можетъ показаться, что Штейнеровы построенія всегда сложнѣе обычныхъ. Отвѣтимъ на это словами самого Штейнера («Геометрическія построенія»; стр. 76—78 русск. пер.):

«Традиціонная, перешедшая къ намъ отъ древнихъ, манера, по которой задача считается рѣшенной, какъ только указано, какимъ образомъ привести ее къ другимъ, ранѣе разсмотрѣннымъ задачамъ, очень мѣшаетъ сужденію о томъ, чего требуетъ полное ея рѣшеніе. Поэтому-то и случается, что такимъ образомъ часто указываются построенія, отъ которыхъ мы бы скоро отказались, если-бы были поставлены въ необходимость *въ дѣйствительности точно* выполнить все, въ нихъ заключающееся, потому что мы навѣрное скоро убѣдились бы, что выполнить построеніе на дѣлѣ, т.-е. съ инструментами въ рукахъ, и выполнить ихъ, если можно такъ выразиться, только языкомъ—совсѣмъ различныя вещи. Очень легко сказать: я дѣлаю то, потомъ другое, затѣмъ третье; но трудность—и въ извѣстныхъ случаяхъ, можно сказать невозможность дѣйствительнаго выполненія построеній, которыя въ высокой степени сложны, требуетъ, чтобы для каждой предложенной задачи было точно опредѣлено: какой изъ различныхъ пріемовъ является наипростѣйшимъ при выполненіи всѣхъ построеній*), или какой пріемъ является самымъ цѣлесообразнымъ при частныхъ обстоятельствахъ, и сколько изъ того, что языкъ нѣсколько поспѣшно выполняетъ, можно устранить, если намъ важно избавить себя отъ всякаго лишняго труда, или достигнуть наибольшей точности или, по возможности, сберечь эпюръ (бумагу), на которомъ мы чертимъ... Что рѣшеніе предшествующихъ задачъ можетъ казаться нѣсколько длиннымъ, не должно еще отпугивать отъ настоящаго метода; если и въ обык-

*) Здѣсь Штейнеръ касается вопроса, изслѣдованіемъ котораго занимается недавно возникшая отрасль геометріи—такъ называемая «геометрографія» (ученіе о простѣйшихъ построеніяхъ).

новенной геометріи мы на дѣлѣ выполнимъ построенія, которыя требуются для рѣшенія сложной задачи, то, какъ было уже сказано, мы скоро увидимъ, что и тамъ многое совсѣмъ не такъ просто, какъ это кажется, когда все выполняется только на словахъ. И я убѣдился, что настоящимъ методомъ, при трудныхъ на первый взглядъ задачахъ, мы получаемъ даже такія простыя рѣшенія, которыя всѣми возможными вспомогательными средствами не могутъ быть сдѣланы ни короче, ни удобнѣе»...

Какъ бы въ подтвержденіе этихъ словъ, современникъ Штейнера, Штаудтъ рѣшилъ помощью линейки одну изъ труднѣйшихъ задачъ геометріи—построеніе правильнаго 17-угольника.

---

3. **Построенія посредствомъ циркуля.** *) (*построенія Маскерони*).

Два рода мотивовъ заставляли геометровъ заниматься построеніями при помощи ограниченныхъ средствъ. Съ одной стороны—понятный теоретическій интересъ, съ другой—нужды практическаго черченія и геодезіи. Мы уже говорили, въ какомъ отношеніи къ послѣднему мотиву стоятъ построенія Штейнера; они предназначаются для тѣхъ случаевъ, гдѣ неограниченное пользованіе циркулемъ представляется практически неудобнымъ. Однако, есть построенія, для которыхъ линейка является недостаточно точнымъ инструментомъ; это тѣ тонкіе чертежи, производящіеся въ небольшомъ масштабѣ и требующіе особой точности, съ какими приходится имѣть дѣло оптикамъ и изготовителямъ астрономическихъ инструментовъ. Опытнымъ и теоретическимъ путемъ было установлено, что циркуль представляетъ собой болѣе точный инструментъ, чѣмъ линейка. Для того, чтобы дать читателю представленіе о несовершенствѣ линейки, какъ точнаго инструмента, приведемъ одно изъ многихъ соображеній. Точки, съ которыми приходится имѣть дѣло при черченіи являются, конечно, не геометрическими, а физическими, имѣющими нѣкоторое протяженіе (это видно, напр., при разсмотрѣніи въ микроскопъ); положимъ для простоты, что точки имѣютъ

---

*) Точнѣе—«посредствомъ проведенія однѣхъ лишь окружностей».

форму круговъ. Соединяя двѣ такія точки A и B (см. черт. 164) посредствомъ линейки, мы можемъ придать послѣдней не одно, а безчисленное множество положеній, предѣлы для которыхъ намѣчаются двумя внутренними касательными къ кружкамъ-точкамъ A и B. Расхожденіе этихъ касательныхъ при прочихъ равныхъ условіяхъ тѣмъ больше, чѣмъ ближе другъ къ другу соединяемыя точки. Если разстояніе между точками A и B невелико, а съ прямой AB приходится имѣть дѣло въ отдаленныхъ ея частяхъ, то ошибка можетъ получиться значительная. Это и другія подобныя соображенія побудили итальянскаго математика Маскерони заняться вопросомъ о томъ, насколько примѣненіе линейки является неизбѣжнымъ въ геометрическихъ построеніяхъ. Результатъ, полученный Маскерони и опубликованный имъ въ объемистомъ трудѣ «Геометрія циркуля» (Geometria del compasso, 1797), былъ довольно неожиданный; оказалось, что обойтись безъ линейки можно при рѣшеніи *всякой* задачи, если только она разрѣшима посредствомъ циркуля и линейки. Пользованіе линейкой обыкновенно позволяетъ упростить построеніе, но мы всегда можемъ ограничиться однимъ только циркулемъ. Послѣдній является, такимъ образомъ, болѣе могущественнымъ средствомъ построенія, чѣмъ линейка, потому что, какъ мы видѣли, циклъ задачъ, разрѣшимыхъ посредствомъ одной только линейки (безъ вспомогательныхъ фигуръ) весьма ограниченъ.

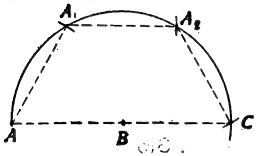
Черт. 164.

Нижеслѣдующія задачи имѣютъ цѣлью дать представленіе о томъ, какъ выполняются *простѣйшія Маскероніевы* построенія. Для яснаго пониманія ихъ необходимо помнить, что единственной законной операціей для насъ теперь является описываніе окружностей. Правда, мы будемъ говорить и о прямыхъ, но исключительно при доказательствѣ, въ построеніи же онѣ участвовать не должны. Для того, чтобы оттѣнить то обстоятельство, что окружности нами дѣйствительно проводятся, а прямыя нужны только для доказательства правильности построенія, мы будемъ обозначать послѣднія на чертежѣ пунктиромъ.

Примѣръ 1. *Удвоить отрѣзокъ (AB), заданный своими конечными точками.*

Эту задачу надо понимать такъ: даны двѣ точки A и B; требуется построить точку C, лежащую на прямой AB (послѣднюю мы, за отсутствіемъ линейки, начертить не можемъ—и въ этомъ вся трудность задачи) такъ, чтобы $BC=AB$.

Рѣшеніе. Описываемъ окружность $B(A)$ *).

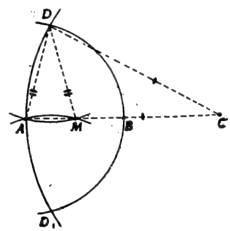


Черт. 165.

Затѣмъ, не измѣняя все время раствора циркуля, изъ точки A, какъ изъ центра, дѣлаемъ на окружности $B(A)$ засѣчку A_1, изъ точки A_1— засѣчку A_2 и, наконецъ, изъ точки A_2—засѣчку, которая дастъ искомую точку C. Въ самомъ дѣлѣ, хорды AA_1, A_1A_2, A_2C, будучи равны радіусу окружности $B(A)$, суть послѣдовательныя стороны вписаннаго въ эту окружность шестиугольника, слѣдовательно, прямая ABC есть діаметръ, откуда и вытекаетъ правильность построенія.

Задача 2. *Раздѣлить пополамъ отрѣзокъ (AB), данный своими конечными точками.*

Рѣшеніе. Удваиваемъ отрѣзокъ AB, т.-е. строимъ точку C, какъ указано въ предыдущей задачѣ (см. черт. 165; на черт. 166 это построеніе не воспроизведено). Описываемъ окружности $C(A)$ и $A(B)$; пусть онѣ пересѣкаются въ точкахъ D и D_1. Если теперь проведемъ окружности $D(A)$ и $D_1(A)$, то онѣ пересѣкутся, кромѣ точки A, еще въ одной точкѣ M, которая и будетъ искомой.—Въ самомъ дѣлѣ, точка M лежитъ на прямой AB, потому что она—такъ же, какъ и точки A и B—равно отстоитъ отъ концовъ отрѣзка DD_1 (слѣд., всѣ три точки A, M и B лежатъ на перпендикулярѣ, проходящемъ черезъ средину DD_1). Сравнивая теперь равнобедренные треугольники CAD и DAM, замѣчаемъ, что уголъ DAM у нихъ общій, слѣдовательно углы при основаніи въ томъ и другомъ треугольникѣ одинаковые и треугольники подобны. Но въ треугольникѣ CAD основаніе (AD) вдвое меньше боковой стороны (AC), слѣдовательно и въ треугольникѣ DAM



Черт. 166.

$$AM=\frac{1}{2}AD.$$

*) Такимъ символомъ мы вездѣ въ дальнѣйшемъ будемъ обозначать окружность, описанную изъ B, какъ изъ центра, и проходящую черезъ A.

Замѣчая, что $AD = AB$, имѣемъ:

$$AM = \frac{1}{2} AB,$$

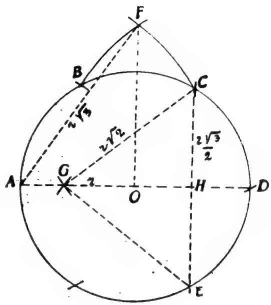
чѣмъ правильность построенія доказана.

Приведемъ примѣръ болѣе сложной задачи.

Задача 3. *Построить сторону правильнаго десятиугольника, вписаннаго въ данную окружность $O(A)$.*

Рѣшеніе. Принявъ A за одну изъ вершинъ правильнаго вписаннаго въ окружность $O(A)$ шестиугольника, намѣчаемъ, путемъ послѣдовательныхъ засѣчекъ (ср. зад. 1), еще четыре вершины B, C, D, E. Проводимъ дуги окружностей $A(C)$ и $D(B)$—пусть онѣ пересѣкутся въ точкѣ F. Изъ прямоугольнаго треугольника OAF, въ которомъ $AO = r$, AF ($= AC$, т.-е. сторонѣ правильнаго вписаннаго треугольника) $= r\sqrt{3}$, найдемъ:

$$OF = \sqrt{AF^2 - OA^2} = \sqrt{3r^2 - r^2} = r\sqrt{2}.$$



Черт. 167.

Если теперь изъ точекъ C и E радіусомъ, равнымъ $OF = r\sqrt{2}$, опишемъ окружности, пересѣкающіяся въ точкѣ G, то отрѣзокъ OG (правильнѣе—пара точекъ O и G, опредѣляющихъ этотъ отрѣзокъ) дастъ намъ искомую сторону десятиугольника. Дѣйствительно изъ прямоугольнаго треугольника CGH, въ которомъ $CG = r\sqrt{2}$, $CH = \frac{1}{2} r\sqrt{3}$, заключаемъ:

$$GH = \sqrt{CG^2 - CH^2} = \sqrt{2r^2 - \frac{3}{4} r^2} = \frac{1}{2} r \sqrt{5};$$

съ другой стороны, OH (апоѳема правильнаго вписаннаго треугольника) $= \frac{1}{2} r$, слѣдовательно:

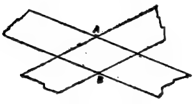
$$OG = \frac{1}{2} r \sqrt{5} - \frac{1}{2} r = r \frac{\sqrt{5} - 1}{2},$$

а это и есть извѣстное выраженіе стороны десятиугольника.

4. **Нѣкоторыя другія средства построенія.** Построенія Штейнера и Маскерони осуществляются при помощи все тѣхъ

же двухъ традиціонныхъ инструментовъ — циркуля и линейки*) — но только съ ограниченіемъ относительно пользованія однимъ изъ нихъ. Между тѣмъ нѣтъ основаній, какъ мы уже говорили, отказываться отъ употребленія другихъ инструментовъ, столь же точныхъ и полезныхъ.—Переходя къ разсмотрѣнію этихъ инструментовъ, мы вынуждены ограничиться краткимъ (и потому неполнымъ) обзоромъ.

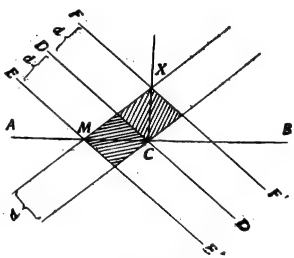
Двусторонняя линейка, т.-е. линейка съ строго-параллельными краями, изъ которыхъ каждый приспособленъ для проведенія прямыхъ линій.—При помощи такой линейки мы можемъ, сверхъ обычныхъ операцій съ односторонней линейкой, проводить въ любыхъ направленіяхъ пары параллелей, отстоящихъ другъ отъ друга на одномъ и томъ же разстояніи, равномъ ширинѣ линейки. Кромѣ того, имѣя двѣ точки A и B, отстоящія одна отъ другой не меньше, чѣмъ на ширину линейки, мы можемъ (двумя способами—какъ показано на черт. 168) помѣстить послѣднюю такъ, чтобы параллельные края линейки проходили черезъ данныя точки A и B.



Черт. 168.

Примѣръ. *Къ данной прямой (AB) въ данной ея точкѣ (C) возставить перпендикуляръ.*

Рѣшеніе. Пусть DD' какая-нибудь прямая, проходящая черезъ точку C. Прикладывая линейку къ прямой DD' сначала съ одной, а потомъ съ другой стороны, проводимъ прямыя EE' и FF', отстоящія отъ прямой DD' на ширину d линейки. Теперь помѣстимъ линейку такъ, чтобы она проходила однимъ краемъ черезъ точку C, а другимъ—черезъ точку M (въ которой пересѣкаются прямыя AB и EE'), и пусть прямая, проведенная



Черт. 169.

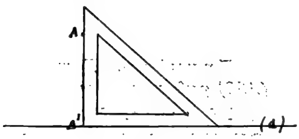
*) Точнѣе—«односторонней линейки», т.-е. линейки, у которой только одна сторона (левіе) приспособлена для проведенія прямыхъ линій.—Смыслъ этого замѣчанія станетъ яснымъ, когда мы познакомимся съ употребленіемъ «двусторонней линейки».

вдоль линейки черезъ точку M, пересѣкается съ FF' въ точкѣ X; прямая CX будетъ искомымъ перпендикуляромъ. Это слѣдуетъ изъ того, что параллелограммы, заштрихованные на чертежѣ, суть ромбы; діагонали CM и CX дѣлятъ пополамъ смежные углы этихъ ромбовъ, а потому взаимно-перпендикулярны.

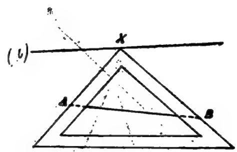
Замѣтимъ еще, что при помощи двусторонней линейки легко выполняются всѣ Штейнеровы построенія, предполагающія, что въ плоскости чертежа данъ параллелограммъ; послѣдній легко начертить, помѣщая линейку послѣдовательно въ двухъ положеніяхъ, какъ показано на черт. 168.

Наугольникъ—обыкновенно модель прямого угла, сдѣланная изъ твердаго матеріала,—позволяетъ непосредственно рѣшать слѣдующія задачи:

1) черезъ данную точку, лежащую внѣ (точка A черт. 170) данной прямой (d) или на ней (точка A') провести перпендикуляръ къ этой прямой;



Черт. 170.

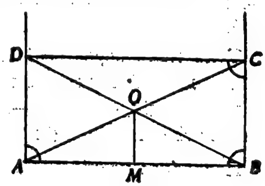


Черт. 171.

2) на данной линіи (l) найти точку x, изъ которой данный отрѣзокъ AB виденъ подъ прямымъ угломъ (черт. 171).

Для проведенія прямыхъ линій можно пользоваться одной изъ сторонъ наугольника или односторонней линейкой.

Примѣръ. *Раздѣлить пополамъ данный отрѣзокъ (AB).*

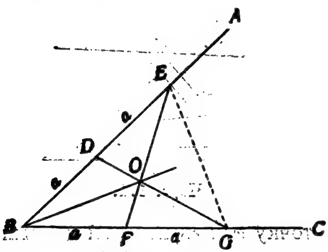


Черт. 172.

Рѣшеніе. При помощи наугольника строимъ послѣдовательно прямые углы BAD, ABC, BCD (C—произвольная точка на перпендикулярѣ, возставленномъ къ AB изъ конца B). Соединяя A съ C и B съ D, получимъ точку O—центръ прямоугольника $ABCD$. Теперь остается изъ точки O опустить перпендикуляръ OM на AB, для чего достаточно приложить наугольникъ одной стороной къ AB такъ, чтобы другая сторона прошла черезъ O.

Обѣ приведенныя выше основныя задачи 1—2, для которыхъ наугольникъ даетъ непосредственное рѣшеніе, могутъ быть рѣшены, какъ извѣстно, также циркулемъ и линейкой. Слѣдовательно, пользуясь наугольникомъ, мы не выходимъ изъ круга задачъ, разрѣшимыхъ этими двумя инструментами. Отсюда, однако, было бы поспѣшно заключить, что той же «мощностью» обладаютъ два наугольника; напротивъ, какъ уже было сказано, посредствомъ двухъ наугольниковъ можно, напр., рѣшить Делійскую задачу (объ удвоеніи куба), недоступную для циркуля и линейки.

Линейка (односторонняя) и эталонъ длины. Подъ эталономъ длины разумѣютъ инструментъ, позволяющій на данной прямой отъ данной точки отложить отрѣзокъ нѣкоторой постоянной длины (для этой цѣли можетъ служить, напр., полоска бумаги опредѣленной длины); поэтому эталонъ называютъ иначе «переносителемъ отрѣзка».



Черт. 173.

Примѣръ. *Данный уголъ (ABC) раздѣлить пополамъ.*

Рѣшеніе. На сторонахъ угла отъ вершины B откладываемъ посредствомъ эталона по два раза длину a. Если теперь проведемъ прямыя EF и GD, служащія медіанами треугольника BGE, то черезъ точку ихъ пересѣченія пройдетъ и третья медіана BO, которая, въ силу равнобедренности треугольника BGE, будетъ въ то же время искомой биссектриссой.

Такъ какъ перенесеніе отрѣзковъ (и даже отрѣзковъ какой угодно длины) можетъ быть выполнено при помощи циркуля, то комбинація «линейка—эталонъ» не можетъ оказаться могущественнѣе комбинаціи «линейка—циркуль».

Подробное изслѣдованіе обнаружило, что первая комбинація дѣйствительно уступаетъ второй; напр., посредствомъ линейки и эталона не можетъ быть построенъ прямоугольный треугольникъ по гипотенузѣ и катету.

Существуютъ болѣе сложные инструменты, имѣющія цѣлью непосредственно выполнять то или иное изъ основныхъ построеній или же какое-нибудь построеніе, недоступное циркулю и линейкѣ. Таковы *биссекторъ* (Фельдблюма)—инструментъ для дѣленія пополамъ произвольнаго даннаго угла; *триссекторъ* (Амадори)—для дѣленія угла на 3 части; различные инструменты для вычерчиванія кривыхъ и т. п.

---

5. **Классификація задачъ на построеніе. Доказательства невозможности.**

Читатель познакомился съ простѣйшими средствами, служащими для рѣшенія задачъ элементарной геометріи. Говоря о построеніяхъ при помощи различныхъ комбинацій инструментовъ, намъ уже приходилось попутно сопоставлять эти комбинаціи между собой; нѣкоторыя изъ нихъ оказывались «эквивалентными» (равносильными) въ томъ смыслѣ, что всякая задача, разрѣшимая при помощи однихъ средствъ, оказывалась разрѣшимой и при помощи другихъ—и обратно.

Ученіе о томъ, какія задачи доступны для разрѣшенія тѣми или иными инструментами, было разработано сравнительно недавно—въ XIX вѣкѣ. Полученные результаты оказались очень плодотворными, такъ какъ положили конецъ настойчивымъ, многовѣковымъ попыткамъ рѣшить нѣкоторыя задачи (каковы квадратура круга, трисекція угла и т. п.) непремѣнно при помощи циркуля и линейки. Въ настоящее время, только люди математически - невѣжественные могутъ тратить силы на рѣшеніе этихъ задачъ; академіи и научныя общества отказались разсматривать труды такихъ, къ сожалѣнію еще и теперь многочисленныхъ, «математиковъ».

Отъ какихъ же свойствъ задачи зависитъ возможность рѣшить ее тѣми или иными средствами? Чтобы дать понятіе о томъ, какъ новѣйшіе математики отвѣтили на этотъ вопросъ, вернемся къ наиболѣе общему методу рѣшенія всякой геометрической задачи—къ алгебраическому методу (§ 1).

Пусть разсматриваемая задача свелась къ разысканію нѣкотораго отрѣзка x, а отрѣзокъ этотъ—при рѣшеніи задачи алгебраическимъ методомъ—опредѣляется нѣкоторымъ уравненіемъ

$$x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-1}+\ldots+A_n=0\ \ldots(6),$$

гдѣ A_1, $A_2 \ldots A_n$ нѣкоторыя выраженія, составленныя раціонально (т.-е. при помощи 4-хъ раціональныхъ операцій—сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія) изъ данныхъ въ задачѣ величинъ (сравн., напр., ур. (5) § 1);оно приводится къ виду (6) послѣ раздѣленія на коэффиціентъ $2a$ при x^2). Оказалось, что возможность построенія отрѣзка x зависитъ отъ степени n уравненія (6); чѣмъ выше эта степень, тѣмъ, вообще говоря, болѣе сложныя средства требуются для рѣшенія задачи. Но это еще не все; вѣдь одинъ и тотъ же отрѣзокъ можетъ удовлетворять уравненію какъ низшей, такъ и высшей степени. Напр., если отрѣзокъ x удовлетворяетъ квадратному ур-ію

$$x^2+5ax-7a^2=0\ \ldots(7),$$

то онъ же будетъ удовлетворять ур-ію 3-й степени

$$x^3+6ax^2-2a^2x-7a^3=0\ \ldots(8),$$

потому что второе ур-іе получается изъ перваго путемъ умноженія на $(x+a)$. Поэтому, если хотимъ говорить объ уравненіи, дѣйствительно характеризующемъ искомый отрѣзокъ, то необходимо разсматривать только такъ наз. «неприводимыя» ур-ія, т.-е. ур-ія, лѣвая часть которыхъ не разлагается на раціональныхъ множителей низшей степени. Напр., ур-іе (7) неприводимо, такъ какъ трехчленъ $x^2+5ax-7a^2$ хотя и можно разложить на два линейныхъ множителя, но послѣдніе содержатъ корни ур-ія (7), а корни эти ирраціональные. Напротивъ, ур-іе (8) не можетъ быть названо неприводимымъ — лѣвая часть его разлагается на множителей $x-a$ и $x^2+5ax-7a^2$.

Если задача (при рѣшеніи ея алгебраическимъ методомъ) приводится къ ***неприводимому*** *ур-ію n-ой степени или къ послѣдовательному рѣшенію конечнаго числа такихъ уравненій, то говорятъ о задачѣ n-й степени.*

Такимъ образомъ, существуютъ задачи 1-й, 2-й, 3-й и т. д. степени; такъ, напр., задача, помѣщенная въ § 1, приводится къ ур-ію 2-й степени (см. ур-іе (5) *).

---

*) О невозможности дѣленія угла на 3 части при помощи циркуля и линейки см. стр. 226.

Существуютъ и такъ называемыя «трансцендентныя» задачи, которыя не могутъ быть сведены къ рѣшенію конечнаго числа уравненій съ раціональными коэффиціентами.

Обращаясь теперь къ средствамъ построенія, разсмотрѣннымъ въ настоящей статьѣ, мы можемъ дать сводку результатовъ, полученныхъ математиками XIX-го столѣтія, въ слѣдующей схемѣ, гдѣ каждая группа содержитъ эквивалентныя между собой средства, и порядокъ группъ соотвѣтствуетъ постепенно расширяющемуся кругу разрѣшимыхъ задачъ.

Средства построенія:	**Разрѣшимы:**
Гр. I. a) Линейка*) и, въ плоскости чертежа, вспомогательный квадратъ (§ 2).	Всѣ задачи 1-й степени.
Гр. II. a) Линейка и эталонъ длины (§ 4). b) Линейка и биссекторъ (§ 4).	Всѣ задачи 1-й степени, а изъ задачъ 2-й степени тѣ, для рѣшенія которыхъ корень приходится извлекать только изъ суммы квадратовъ (но не изъ разности или произведенія отрѣзковъ).
Гр. III. a) Линейка и циркуль (§ 1). b) Циркуль (§ 3). c) Линейка и, въ плоскости чертежа, вспомогательная окружность съ центромъ (§ 2). d) Двусторонняя линейка (§ 4). e) Наугольникъ **) (§ 4).	Всѣ задачи 2-й степени.

*) Вездѣ, гдѣ не оговорено противное, рѣчь идетъ объ *односторонней* линейкѣ.

**) Предполагается, что одной изъ сторонъ наугольника можно пользоваться, какъ линейкой.

Гр. IV.	a) Два наугольника. b) Линейка, циркуль и, въ плоскости чертежа, какое-нибудь коническое сѣченіе *), отличное отъ окружности.	Всѣ задачи 3-й и 4-й степени.

Когда эти результаты были получены, стало ясно, въ чемъ трудность задачъ о трисекціи угла, удвоеніи куба, квадратурѣ круга и т. п. Оказалось, что первыя двѣ задачи не могутъ быть рѣшены циркулемъ и линейкой (вообще—средствами группъ I—III), такъ какъ приводятъ къ уравненіямъ (неприводимымъ) 3-й степени; зато эти двѣ задачи легко рѣшаются средствами группы IV. Что же касается квадратуры круга, то это задача трансцендентная (см. выше) и не можетъ быть рѣшена ни посредствомъ наугольниковъ, ни посредствомъ проведенія алгебраическихъ кривыхъ; точное построеніе можетъ дать только инструментъ, вычерчивающій трансцендентную кривую (подробнѣе см. «Знаменитыя задачи древности»).

Изложенные результаты новѣйшей теоріи геометрическихъ построеній, надѣемся, убѣдятъ читателя въ справедливости слѣдующихъ словъ, принадлежащихъ современному итальянскому геометру *Энрикесу*:

«*Не существуетъ абсолютно неразрѣшимыхъ задачъ, есть лишь относительно неразрѣшимыя*».

---

*) Т.-е. эллипсъ, парабола или гипербола.

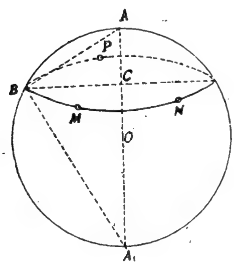
Задачи на построеніе *).

Слѣдующія задачи рѣшить циркулемъ и линейкой.

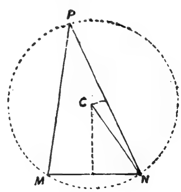
Задача I.

Построить діаметръ даннаго матеріальнаго (напр. сдѣланнаго изъ дерева, картона) шара.

Рѣшеніе. Ставимъ ножку циркуля въ точку A, произвольно взятую на поверхности шара, и затѣмъ произвольнымъ радіусомъ AB описываемъ *на этой поверхности* окружность; длину AB откладываемъ на имѣю-



Черт. 174.



Черт. 175.

щемся у насъ плоскомъ эпюрѣ (чертежномъ листѣ). На построенной окружности беремъ произвольно три точки M, N, P

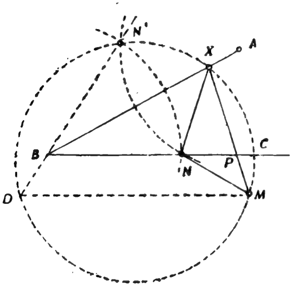
*) Предлагаемыя задачи не представляютъ собою систематическаго цѣлаго. Мы не имѣемъ въ виду иллюстрировать какой-либо отдѣлъ или методъ, а желаемъ только занять вниманіе читателя нѣсколькими задачами, на нашъ взглядъ, интересными и рѣдко встрѣчающимися въ распространенныхъ сборникахъ. Поэтому непропорціонально много мѣста удѣлено построеніямъ ограниченными (только циркулемъ, только линейкой) или необычными (напр. посредствомъ двусторонней линейки) средствами, или построеніямъ въ необычныхъ условіяхъ (зад. 1).

Что касается приложенныхъ къ задачамъ рѣшеній, то, за недостаткомъ мѣста намъ пришлось изъ 4-хъ ступеней: 1) анализъ, 2) построеніе, 3) до-

и, перенеся при помощи циркуля длины прямолинейныхъ отрѣзковъ MN, NP и PM на плоскость, строимъ $\triangle$-къ, имѣющій эти отрѣзки сторонами. Если теперь около полученнаго $\triangle$-ка опишемъ окружность, то радіусъ ея дастъ намъ радіусъ BC окружности $BNMP$, начерченной на шаровой поверхности. Наконецъ, діаметръ AA' получится, если построимъ прямоугольный $\triangle ABA'$ по данному катету AB и высотѣ BC, опущенной на гипотенузу (для этого достаточно построить прямоугольный $\triangle ABC$ по гипотенузѣ AB и катету BC, а затѣмъ продолжить AC до пересѣченія съ перпендикуляромъ $A'B$, возставленнымъ изъ точки B къ прямой BA).

Задача 2.

Данъ уголъ ABC и двѣ точки M и N, изъ которыхъ вторая лежитъ на сторонѣ BC угла. Требуется на другой сторонѣ AB угла найти такую точку X, чтобы прямая BC отсѣкала отъ сторонъ угла NXM равные отрѣзки ($XN = XP$).



Черт. 176.

Рѣшеніе. Изъ двухъ какихъ-нибудь точекъ прямой AB — напр. изъ точекъ A и B—описываемъ окружности $A(N)$ *) и $B(N)$ (на черт. показаны только дуги); отмѣчаемъ ихъ точку пересѣченія N', симметричную съ N по отношенію прямой AB. Проводимъ прямую $N'B$, а затѣмъ изъ точки M прямую, параллельно BC до пересѣченія съ прямой $N'B$ въ точкѣ O. Если теперь черезъ точки M, O и N' проведемъ окружность, то точка X ея пересѣченія съ стороной AB дастъ искомую.

казательство (правильности рѣшеній) и 4) изслѣдованіе,—составляющихъ элементы полнаго рѣшенія, ограничиться только 2-й и 3-й ступенями, иногда касаясь и 4-й.

*) См. прим. на стр. 194.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ очевиднаго равенства $\triangle$-ковъ BNX и $BN'X$ имѣемъ

$$\angle BNX = \angle BN'X \ \ldots(1)$$

далѣе, по свойству четыреугольника, вписаннаго въ окружность

$$\angle BN'X + \angle OMX = 2d \ \ldots(2)$$

но, въ силу параллельности прямыхъ OM и BP, найдемъ, что $\angle OMX = \angle BPX$, откуда (см. (1) и (2)) будемъ имѣть:

$$\angle BNX + \angle BPX = 2d \text{ и}$$

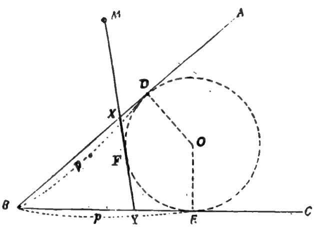
$$\angle BPX = 2d - \angle BNX = \angle PNX,$$

слѣдовательно $\triangle NXP$ равнобедренный, при чемъ $XN = XP$.

Задача 3.

Изъ данной точки (M) къ сторонамъ даннаго угла (ABC) провести сѣкущую, отсѣкающую отъ сторонъ угла треугольникъ (BXY) даннаго периметра (2р.).

Рѣшеніе. На сторонахъ даннаго угла отъ вершины B откладываемъ отрѣзки $BD = BE = p$. Изъ точекъ D и E соотвѣтственно къ прямымъ AB и BC возставляемъ перпендикуляры до взаимнаго пересѣченія въ точкѣ O. Проводимъ окружность $O(D)$, а затѣмъ изъ точки M—касательную къ этой окружности. Эта касательная встрѣчаетъ *отрѣзки* BD и BE въ точкахъ X и Y; полученный $\triangle BXY$—искомый.



Черт. 177.

Дѣйствительно, по свойству касательныхъ, проведенныхъ изъ одной точки имѣемъ:

$$XD = XF \text{ и } YF = YE,$$

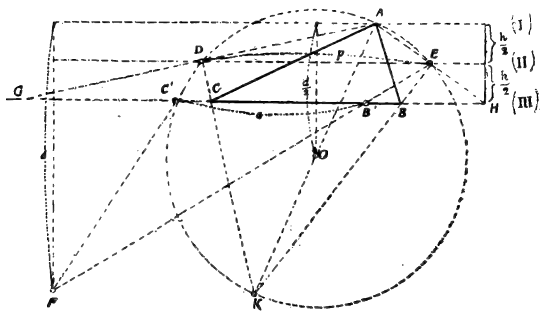
послѣ чего периметръ тр-ка BXY можно выразить въ видѣ:

$$\text{перим. } \triangle BXY = BX + XF + FY + YB = BX + XD + EY + YB = BD + EB = 2p.$$

Задача 4.

Построить треугольникъ по данному основанію (a), высотѣ (h) и суммѣ (s) двухъ боковыхъ сторонъ.

Рѣшеніе. Проводимъ три параллели (I), (II) и (III) на разстояніи $\frac{h}{2}$ одна отъ другой. На средней параллели (II) откладываемъ отрѣзокъ DE, равный полупериметру p искомаго $\triangle$-ка (периметръ, согласно условію, извѣстенъ: $2p=a+s$), а на паралл-



Черт. 178.

лели (III)—отрѣзокъ $B'C'=$основанію a треугольника. Проведя прямыя DC' и EB', получимъ въ пересѣченіи ихъ точку F; пусть разстояніе этой точки до прямой (I) равно d. Черезъ средину отрѣзка DE проводимъ къ нему перпендикуляръ, и на послѣднемъ строимъ точку O, отстоящую отъ прямой (I) на разстояніи $\frac{d}{2}$. Изъ точки O радіусомъ $OD=OE$ описываемъ окружность — пусть A одна изъ точекъ ея пересѣченія съ прямой (I). Проведя прямыя AD и AE до пересѣченія съ прямой (III) соотвѣтственно въ точкахъ G и H, строимъ $DK \perp AG$ и $EK \perp AH$; очевидно, AK есть діаметръ нашей окружности. Пусть C и B соотвѣтственно точки пересѣченія прямыхъ DK

и EK съ прямой (III); докажемъ, что $\triangle ABC$ есть искомый.

Дѣйствительно высота $\triangle$-ка ABC, очевидно, равна данной высстѣ h. Замѣчая, что точки D и E суть соотвѣтственно средины отрѣзковъ AG и AH, заключаемъ, что точка C одинаково отстоитъ отъ A и G, а точка B — отъ A и H, причемъ

$$CG=CA \quad \text{и} \quad BH=AB.$$

Поэтому отрѣзокъ GH равенъ периметру $\triangle$-ка ABC. Но

$$GH=2DE=2p=a+s;$$

слѣдовательно периметръ $\triangle$-ка ABC равенъ данному.

Остается показать, что основаніе CB $\triangle$-ка равно данному отрѣзку a. Для этого замѣтимъ, что изъ равенства $AK=2AO$ вытекаетъ, что точка K отстоитъ отъ прямой (I) вдвое дальше, чѣмъ точка O; но такъ какъ разстояніе точки O до прямой (I), согласно построенію, равно $\frac{d}{2}$, то разстояніе точки K до той же прямой равно d (такъ что точки K и F одинаково отстоятъ отъ прямой (I); прямая KF параллельна прямымъ (I), (II) и (III)).

Теперь изъ подобія $\triangle$-ковъ DEK и CBK имѣемъ (сходственныя стороны относятся, какъ соотвѣтствующія высоты):

$$\frac{DE}{BC}=\frac{d-h}{d-2h},$$

а изъ подобія $\triangle$-ковъ DEK и $C'B'K$

$$\frac{DE}{B'C'}=\frac{d-h}{d-2h}.$$

Сравнивая эти пропорціи, заключаемъ, что

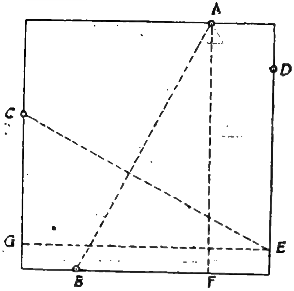
$$BC=B'C'=a.$$

Задача. 5.

Даны четыре точки A, B, C и D; построить квадратъ такъ, чтобы стороны его проходили черезъ эти четыре точки.

Рѣшеніе. Соединяемъ прямой двѣ изъ четырехъ данныхъ точекъ, напр. A и B. Черезъ третью точку (C) проводимъ прямую перпендикулярно къ AB и откладываемъ $CE=AB$. Если теперь

проведемъ прямую DE, затѣмъ черезъ точку C параллельную, а черезъ точки A и D перпендикулярныя къ ней, то въ пересѣченіи этихъ четырехъ прямыхъ получится искомый квадратъ. Дѣйствительно, что получится прямоугольникъ—очевидно. Остается доказать, что разстояніе AF и EG между парами противоположныхъ сторонъ равны. Это вытекаетъ изъ равенства прямоугольныхъ тр-ковъ ABF и ECG, у которыхъ $AB = EC$ и $\angle ECG = \angle ABF$, какъ острые углы съ взаимно-перпендикулярными сторонами.



Черт. 179.

Замѣчаніе. Читатель легко замѣтить, что при рѣшеніи задачи нами была допущена нѣкоторая произвольность, именно, произвольно была выбрана (изъ 6-ти возможныхъ) исходная пара точекъ A и B; изъ двухъ остальныхъ точекъ (C и D) мы воспользовались для дальнѣйшаго построенія сперва точкой C, а потомъ точкой D (можно было поступить наоборотъ); наконецъ отрѣзокъ CE былъ отложенъ въ одномъ изъ двухъ возможныхъ направленій. Варьируя эти комбинаціи различными способами, получимъ еще нѣсколько рѣшеній нашей задачи; рекомендуемъ читателю подсчитать, каково наибольшее возможное число рѣшеній этой задачи.

Задача 6.

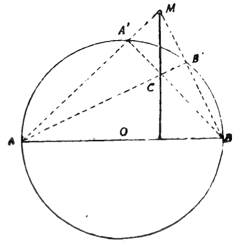
Дана окружность, прямая AB, проходящая черезъ центръ ея (однако, самый центръ не данъ) *) и точка M внѣ прямой AB; требуется изъ точки M на прямую AB опустить перпендикуляръ, *пользуясь только линейкой.*

---

*) Мы не имѣемъ здѣсь, такимъ образомъ, Штейнеровой задачи въ точномъ смыслѣ этого слова (см. «Теорія геом. построеній»).

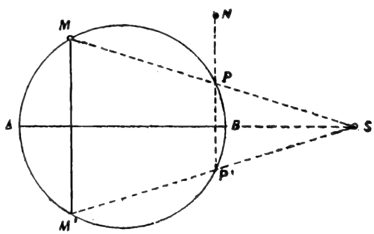
Рѣшеніе. Разберемъ два случая.

I. Точка M не лежитъ на данной окружности, т.-е. лежитъ либо внѣ, либо внутри ея. Въ виду того, что построеніе для внутренней точки то же самое, что и для внѣшней, остановимся на послѣднемъ случаѣ. Соединяемъ прямыми точку M съ концами діаметра AB, и пусть прямыя MA и MB пересѣкаютъ данную окружность соотвѣтственно въ точкахъ A' и B'. Проводимъ прямыя AB' и $A'B$; если теперь точку C ихъ встрѣчи соединимъ съ M, то прямая MC будетъ искомымъ перпендикуляромъ. Дѣйствительно, углы $AA'B$ и $AB'B$ прямые (опираются на діаметръ), слѣдовательно прямыя AB' и BA' служатъ высотами въ $\triangle$-кѣ MAB; но три высоты тр-ка должны пересѣкаться въ одной точкѣ, значитъ MC есть третья высота $\triangle$-ка MAB, т.-е. $MC \perp AB$.



Черт. 180.

II. Точка M лежитъ на данной окружности. Возьмемъ какую-нибудь точку N, лежащую внѣ или внутри окружности и изъ этой точки опустимъ перпендикуляръ на AB, поступая, какъ изложено выше (случай I). Точку N мы всегда можемъ взять такъ, чтобы перпендикуляръ пересѣкалъ окружность въ двухъ точкахъ P и P' (для этого достаточно, напр., взять точку N внутри окружности). Проведя прямую MP до пересѣченія съ AB въ точкѣ S*), а затѣмъ прямую SP', найдемъ точку M', какъ второе пересѣченіе окружности съ прямой SP'. Прямая MM' и



Черт. 181.

*) Случая $MP \parallel AB$ легко избѣжать, пользуясь произволомъ въ выборѣ точки N.

будетъ искомымъ перпендикуляромъ, какъ это можно видѣть изъ симметричности чертежа по отношенію къ прямой AB.

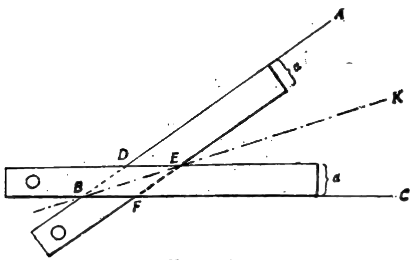
Задача 7.

При помощи двусторонней (съ параллельными краями) линейки *)

a) раздѣлить пополамъ данный уголъ,

b) удвоить данный уголъ.

Рѣшеніе. a) Пусть требуется раздѣлить пополамъ уголъ ABC. Прикладываемъ линейку однимъ краемъ послѣдовательно къ сторонамъ AB и BC угла такъ, чтобы другой ея край въ обоихъ случаяхъ приходился внутри угла ABC. Проведя прямыя EF и DE, которыя очевидно будутъ отстоять отъ прямыхъ AB и BC на ширину a линейки, получимъ ромбъ $BDEF$. Остается провести діагональ BE этого ромба, которая и будетъ искомой биссектриссой.



Черт. 182.

b) Пусть данъ уголъ KBC; требуется его удвоить. Прикладываемъ линейку къ сторонѣ BC однимъ краемъ и вдоль другого проводимъ прямую, которая пусть пересѣчетъ сторону BK въ точкѣ E. Теперь помѣщаемъ линейку такъ, чтобы одинъ ея край проходилъ черезъ E, а другой черезъ B; вдоль послѣдняго проводимъ прямую BA; уголъ ABC очевидно будетъ вдвое больше угла KBC.

---

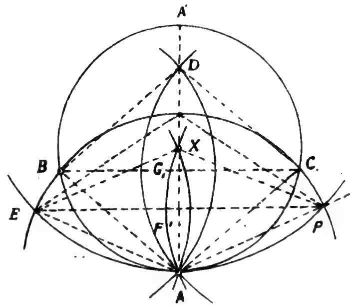
*) См. «Теор. геом. построеній»,—тамъ указано, какія операціи выполнимы при помощи такой линейки.

Слѣдующія задачи рѣшить, пользуясь только циркулемъ (построенія Маскерони) *).

Задача 8.

Найти центръ данной окружности.

Рѣшеніе. На данной окружности (на черт. 183 окружность $ABA'C$) беремъ произвольно двѣ точки A и B и описываемъ окружность $A(B)$, пересѣкающую данную въ точкахъ B и C. Строимъ окружности $B(A)$ и $C(A)$, пересѣкающіяся, кромѣ точки A, въ точкѣ D. Строимъ окружность $D(A)$, пересѣкающую окружность $A(B)$ въ точкахъ A и F. Если теперь проведемъ окружности $E(A)$ и $F(A)$ до пересѣченія въ точкѣ X, то послѣдняя дастъ искомый центръ. — Дѣйствительно четыреугольники $ABDC$ и $AEXF$, въ силу построенія, суть ромбы, а потому въ каждомъ изъ нихъ діагонали взаимно-перпендикулярны и взаимно дѣлятся пополамъ. Теперь примѣнимъ дважды теорему, извѣстную изъ элем. геометріи: «хорда окружности есть средняя пропорціональная между діаметромъ и прилежащимъ его отрѣзкомъ **)».



Черт. 183.

*) См. «Теорія геометрич. постр.», Напоминаемъ читателю, что въ построеніяхъ Маскерони единственной дозволенной чертежной операціей является проведеніе окружностей. Если говорится, что дана (или ищется) прямая (или отрѣзокъ), то это значитъ что дана (ищется) *пара точекъ*, опредѣляющихъ эту прямую (отрѣзокъ).—Читателя не должно смущать, что на нашихъ чертежахъ фигурируютъ прямыя; онѣ участвуютъ не въ построеніи, а въ доказательствѣ—и въ знакъ этого отмѣчены пунктиромъ.

**) Полнѣе: «... и проэкціей этой хорды на діаметръ, проходящій черезъ одинъ изъ ея концовъ».

Примѣняя теорему къ хордѣ AF окружности $D(A)$ найдемъ, что

$$AF^2=2DA \cdot AF_1,$$

примѣняя же её къ хордѣ AC данной окружности найдемъ, что

$$AC^2=AA' \cdot AC_1$$

(AA' есть діаметръ данной окружности, такъ какъ проходитъ черезъ средину C_1 хорды BC, перпендикулярно къ послѣдней). Но $AF=AC$ (радіусы одной и той же окружности); слѣдовательно

$$2DA \cdot AF_1=AA' \cdot AC_1.$$

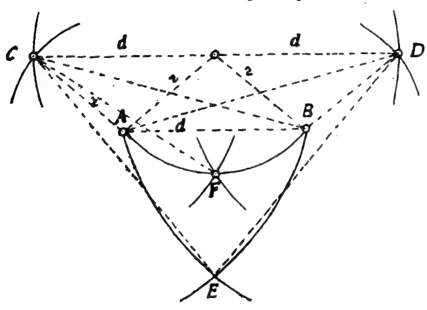
Замѣтимъ, что $AF_1=\frac{1}{2}AX$ и $AC_1=\frac{1}{2}DA$; подставляя эти значенія въ послѣднее равенство и сокращая на DA, получимъ $AX=\frac{1}{2}AA'=\frac{1}{2}$ діаметра$=$радіусу данной окружности.

Замѣчаніе. Легко замѣтить, что для предыдущаго построенія нѣтъ надобности, чтобы была начерчена *вся* окружность $ABA'C$; достаточно какой-нибудь ея дуги.

Задача 9.

Раздѣлить пополамъ данную дугу окружности.

Рѣшеніе. Если центръ дуги не данъ, то строимъ его, какъ указано въ рѣшеніи предыдущей задачи (см. «замѣчаніе»).



Черт. 184.

Пусть A и B концы дуги, d—разстояніе между ними, O—центръ дуги, r—ея радіусъ. Описавъ изъ точекъ A и B окружности радіусомъ r, а изъ точки O—окружность радіусомъ d, найдемъ двѣ точки C и D, лежащія на одной прямой съ O и образующія съ точками O, A и B вершины двухъ одинаковыхъ параллело-

граммовъ $OBAC$ и $OABD$. Если теперь проведемъ окружности $C(B)$ и $D(A)$ до взаимнаго пересѣченія въ F, а затѣмъ изъ точекъ C и D опишемъ окружность радіусомъ $=OF$, то онѣ пересѣкутся въ точкѣ E, которая и будетъ искомой срединой дуги AB. Для доказательства обнаружимъ, что средина дуги AB отстоитъ отъ точекъ C и D на разстояніе $=OF$. Дѣйствительно, изъ параллелограмма $OBAC$, по извѣстному свойству діагоналей, имѣемъ:

$$CB^2+r^2=2r^2+2d^2, \text{ откуда } CB^2=r^2+2d^2.$$

Далѣе, замѣчая, что $CF=CB$, найдемъ

$$OF=\sqrt{CF^2-CO^2}=\sqrt{r^2+2d^2-d^2}=\sqrt{r^2+d^2}.$$

То же самое выраженіе имѣютъ разстоянія средины дуги AB до точекъ C и D, какъ это легко усматривается изъ прямоугольныхъ $\triangle$-ковъ COE и DOE.

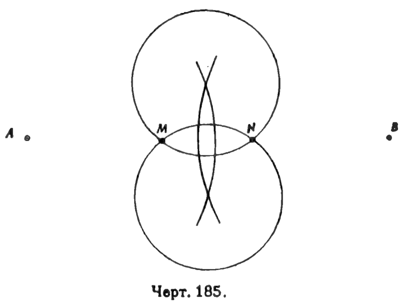
Задача 10.

Найти точки пересѣченія данной окружности (K) съ прямой, проходящей черезъ двѣ данныя точки (A и B).

Рѣшеніе. Сначала находимъ центръ O данной окружности (см. зад. 8).

Описываемъ окружности $A(O)$ и $B(O)$. Здѣсь возможны два случая.

I. Окружности пересѣкаются, кромѣ точки O, въ точкѣ O' (которая, очевидно, будетъ симметрична съ точкой O по отношенію къ прямой AB). Если теперь изъ точки O' опишемъ окружность (K') тѣмъ же радіусомъ, что и у данной окружности

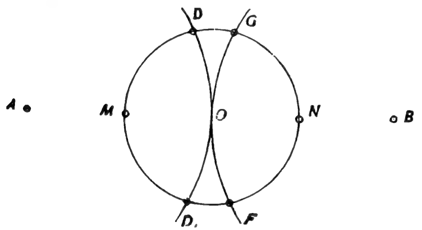


Черт. 185.

K, то точки M и N пересѣченія обѣихъ окружностей дадутъ намъ въ то же время искомыя точки пересѣченія окружности K съ

прямой AB (неначерченной). Доказательство выводится изъ симметричности чертежа по отношенію къ прямой AB.—Если окружность K' касается окружности K, то прямая AB также касается послѣдней, и предыдущее построеніе дастъ намъ точку касанія. Наконецъ, окружности K и K' могутъ вовсе не пересѣкаться—это будетъ означать, что прямая AB не встрѣчаетъ окружности K.

II. Окружности $A(O)$ и $B(O)$ касаются другъ друга въ точкѣ O; это произойдетъ въ томъ случаѣ, когда точка O лежитъ на прямой AB. Чтобы опредѣлить точки M и N встрѣчи данной окружности съ прямой AB достаточно раздѣлить пополамъ (см. предыд. зад. 9) дуги DD' и GF, отсѣкаемыя отъ данной окружности окружнсстями $A(O)$ и $B(O)$.—Вмѣсто этого проще поступить такъ: построить сначала только одну изъ требуемыхъ точекъ, напр. M (дѣля дугу ED пополамъ), а затѣмъ уже найти діаметрально противоположную точку N, удваивая отрѣзокъ MO (см. «Теор. геом. постр.» § 3, примѣръ 1).



Черт. 186.

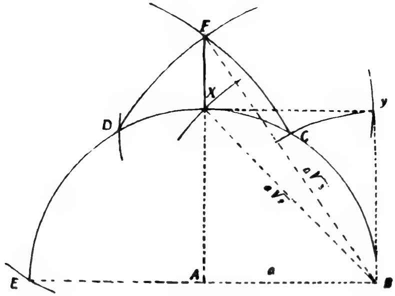
Задача 11.

Даны двѣ смежныя вершины квадрата $(A$ и $B)$; построить двѣ другія.

Рѣшеніе. Описываемъ окружность $A(B)$. Затѣмъ, *не мѣняя раствора циркуля*, дѣлаемъ послѣдовательно засѣчки дугами окружностей $B(C)$, $C(D)$ и $D(E)$.

Точки B, C, D и E, очевидно, служатъ 4-мя послѣдовательными вершинами правильнаго 6-угольника, вписаннаго въ окружность $A(B)$; слѣдовательно каждое изъ разстояній BD и

EC равно сторонѣ правильнаго 3-угольника, вписаннаго въ ту же окружность, и равно $a\sqrt{3}$, гдѣ $a=AB$. Описавъ окружности



Черт. 187.

$B(D)$ и $E(C)$, найдемъ точку F и изъ прямоугольнаго $\triangle$-ка AFB опредѣлимъ AF.

$$AF=\sqrt{FB^2-AB^2}=\sqrt{(a\sqrt{3})^2-a^2}=\sqrt{2a^2}=a\sqrt{2}=$$

$=$сторонѣ квадрата, вписаннаго въ окружность $A(B)$. **Поэтому**, если изъ точекъ B и E радіусомъ$=AF=a\sqrt{2}$ опишемъ дуги, то онѣ пересѣкутся въ срединѣ X полуокружности $BCDE$. Точка X, очевидно, дастъ одну изъ двухъ искомыхъ вершинъ квадрата; другая Y легко найдется, если изъ точекъ B и X опишемъ дуги радіусомъ a.

Знаменитыя задачи древности.

(Удвоеніе куба, трисекція угла, квадратура круга).

Есть въ математикѣ задачи, надъ рѣшеніемъ которыхъ трудились безрезультатно лучшіе представители математическаго знанія въ теченіе цѣлаго ряда вѣковъ; особенно много усилій, энергіи и времени было потрачено на разрѣшеніе задачъ объ удвоеніи куба, трисекціи угла и квадратурѣ круга.

Исторія этихъ трехъ задачъ глубоко поучительна; рѣшеніемъ ихъ занимались люди, стоявшіе на противоположныхъ полюсахъ математическаго знанія.

Съ одной стороны, это были корифеи науки, подходившіе къ этимъ задачамъ во всеоружіи своего генія и знаній своей эпохи и уходившіе отъ нихъ съ яснымъ сознаніемъ, что часъ побѣды еще не насталъ; но усилія, казалось бы безплодныя, одного труженика пролагали путь другому; этотъ-то путь, съ постепеннымъ нарастаніемъ математическихъ знаній въ концѣ концовъ и привелъ къ результату.

Съ другой стороны, около этихъ задачъ всегда увивался цѣлый рой математическихъ невѣждъ—разныхъ любителей и недоучекъ. Эти люди, имѣвшіе общей чертой невѣжество и честолюбіе, конечно, науки впередъ не двигали, съ трудами своихъ предшественниковъ обыкновенно не справлялись и преемникамъ наслѣдства не оставляли.

Найденныя ими приближенныя или неправильныя рѣшенія той или иной задачи выдавались, иногда по невѣжеству, а иногда и сознательно, за истинныя; составители ихъ возмущались «несправедливостью» и «косностью» ученаго міра, проходившаго безъ вниманія мимо тощихъ брошюрокъ съ кричащими загла-

віями, какими и теперь еще, къ сожалѣнію, богатъ книжный рынокъ. Всѣ эти авторы «совершенно точныхъ» квадратуръ круга, трисекцій угла и т. п. исходили изъ ложнаго представленія, будто математика есть лотерея, гдѣ должно только посчастливиться—и задача, не поддававшаяся усиліямъ титановъ мысли, будетъ удачно рѣшена какимъ-нибудь невѣжественнымъ человѣкомъ.

Между тѣмъ исторія науки учитъ какъ разъ обратному: тѣ задачи, которыя, несмотря на простоту формулировки, долго не поддавались рѣшенію, всегда оказывались связанными тѣснѣйшимъ образомъ съ какими-нибудь другими болѣе сложными математическими теоріями, относящимися нерѣдко къ такой области, которая казалась не имѣющей ничего общаго съ данными задачами. Кто, напр., могъ бы подумать, что такой «чисто геометрическій» вопросъ, какъ квадратура круга, окажется связаннымъ съ свойствами числа e (основаніе натуральной системы логариѳмовъ) и съ новѣйшими изслѣдованіями въ области анализа и алгебры?

Коренная ошибка математиковъ-любителей, тщетно пытавшихся разрѣшить ту или иную изъ классическихъ задачъ древности именно въ томъ и состоитъ, что они изъ простоты *формулировки* заключали о простотѣ *рѣшенія* задачи. Имъ казалось, что такая, всякому понятная задача, какъ «найти квадратъ, имѣющій ту же площадь, что и данный кругъ» или «раздѣлить на три равныя части данный уголъ», задача, содержащая лишь элементарныя геометрическія понятія, должна имѣть и элементарное рѣшеніе.

Скоро исполнится полтора вѣка съ тѣхъ поръ, какъ выдающійся швейцарскій математикъ Ламбертъ, сопоставляя двѣ задачи, тѣсная связь которыхъ уже тогда намѣчалась, 1) о точномъ выраженіи числа π *) (или, какъ тогда говорили, «Лудольфова числа»—по имени математика Лудольфа, вычислившаго π съ очень большимъ приближеніемъ), и 2) о точномъ выраженіи основанія e натуральныхъ (по старой терминологіи, «гипербо-

---

*) Ниже будетъ подробнѣе выяснено, въ какомъ отношеніи стоитъ эта задача къ квадратурѣ круга.

лическихъ») логариѳмовъ,—высказалъ слѣдующія глубокія замѣчанія *):

«Если спросить, почему же только вокругъ Лудольфова числа поднимаютъ столько шума, то отвѣтъ на это отчасти даетъ исторія математики, отчасти же отвѣтъ дается тѣмъ, что понятія «кругъ, четыреугольникъ, величина, равный» извѣстны всякому, но нельзя сказать того же о «гиперболическомъ логариѳмѣ», такъ какъ это понятіе дѣлается извѣстнымъ лишь при посредствѣ исчисленія безконечно-малыхъ...»

Остается упомянуть еще двѣ причины, толкавшія въ свое время многихъ къ занятіямъ непосильными для нихъ задачами.

1) Въ средніе вѣка, въ эпоху господства мистицизма и грубыхъ суевѣрій, было распространено мнѣніе, что рѣшеніе задачи о квадратурѣ круга откроетъ автору всѣ загадки бытія, подобно тому, какъ алхимики приписывали эту чудодѣйственную силу воображаемому «философскому камню», а физики—машинѣ, осуществляющей «perpetuum mobile» (вѣчное движеніе).

2) Въ болѣе близкія къ намъ и болѣе «практическія» времена среди полуобразованныхъ людей ходила легенда о какихъ-то денежныхъ преміяхъ, будто бы назначенныхъ академіями за рѣшеніе знаменитыхъ задачъ. Между тѣмъ уже съ XVIII вѣка академіи только и дѣлали, что открещивались отъ осаждавшихъ ихъ толпъ «рѣшателей».

Для того, чтобы понять, въ чемъ заключалась трудность трехъ задачъ, составляющихъ предметъ этой статьи, необходимо помнить, что подъ рѣшеніемъ геометрической задачи на построеніе съ древнихъ временъ разумѣлось рѣшеніе *посредствомъ циркуля и линейки* (подробнѣе объ этомъ см. «Теор. геом. по-

---

*) Въ статьѣ, носящей характерное заглавіе: «Предварительныя свѣдѣнія для ищущихъ квадратуру и спрямленіе круга» («Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur und Rectification des Circulus suchen», 1766); есть русскій переводъ въ книгѣ: *Рудіо:* О квадратурѣ круга, Одесса 1911.

строеній»). Построенія при помощи другихъ средствъ давно были извѣстны, но почему-то считались «неточными». Равнымъ образомъ было извѣстно много способовъ приближенныхъ построеній (циркулемъ и линейкой), вполнѣ достаточныхъ для практическихъ цѣлей.—Теоретически вопросъ о всѣхъ трехъ задачахъ можно считать рѣшеннымъ уже въ XIX вѣкѣ, когда доказана была *невозможность* построенія ихъ посредствомъ циркуля и линейки.

Сообразно съ изложеннымъ, мы будемъ въ дальнѣйшемъ заниматься двумя типами рѣшеній:

1) *точными*, которыя осуществляются при помощи какихъ-либо инструментовъ, помимо циркуля и линейки;

и 2) *приближенными*, но за то не требующими для своего выполненія иныхъ средствъ, кромѣ циркуля и линейки.

Удвоеніе куба (Делійская задача).

Математика древности была въ гораздо большей степени достояніемъ единичныхъ, избранныхъ лицъ, чѣмъ это наблюдается теперь. И если нѣкоторые математическіе вопросы того времени дошли до насъ, окруженные миѳомъ, легендой,—то нѣтъ сомнѣнія, что эти вопросы еще тогда, при своемъ возникновеніи, привлекли интересъ болѣе широкихъ круговъ. Такъ было съ Пиѳагоровой теоремой (см. о ней статью въ этомъ томѣ), породившей извѣстную легенду о «гекатомбѣ». Другая популярная задача древности—«удвоеніе куба»—получила названіе «Делійской» въ связи съ слѣдующимъ миѳомъ.

Когда на островѣ Делосѣ вспыхнула чума, жители его обратились къ оракулу, который отвѣтилъ, что гнѣвъ боговъ можно отвратить, удвоивъ жертвенникъ Аполлона. Жертвенникъ этотъ былъ кубической формы, и жители Делоса, не долго думая, поставили на него другой совершенно такой же кубъ. Однако, чума не прекращалась; снова спрошенный оракулъ отвѣтилъ, что надо было удвоить кубъ, не измѣняя его формы, т.-е. такъ, чтобы и новый жертвенникъ имѣлъ видъ куба. За разрѣшеніемъ этой геометрической задачи Делосцы обратились къ Платону, который язвительно отвѣтилъ имъ: «Вѣроятно, вы разгнѣвали

боговъ тѣмъ, что мало занимаетесь геометріей», но самъ не нашелъ рѣшенія.

Этотъ миѳъ и другіе, связанные съ той же задачей, интересны, конечно, лишь постольку, поскольку характеризуютъ популярность задачи и даютъ нѣкоторыя хронологическія указанія. Послѣднія позволяютъ построить довольно правдоподобную научную гипотезу относительно возникновенія Делійской задачи. Гипотеза эта ставитъ въ связь Делійскую задачу съ Пиѳагоровой теоремой, которая даетъ возможность «удвоить квадратъ», т.-е. построить квадратъ, имѣющій площадь вдвое большую, чѣмъ данный; достаточно за сторону искомаго квадрата взять діагональ даннаго. Отсюда естественный ходъ мысли долженъ былъ привести Пиѳагорейцевъ (вообще удѣлявшихъ исключительное вниманіе правильнымъ фигурамъ и тѣламъ) къ аналогичной стереометрической задачѣ—удвоенію куба.

Если перевести Делійскую задачу на языкъ алгебры, то вопросъ сведется къ построенію отрѣзка x (ребро искомаго куба), опредѣляемаго уравненіемъ

$$x^3=2a^3,$$

гдѣ a—ребро даннаго куба. Полагая для простоты $a=1$, имѣемъ $x=\sqrt[3]{2}$; Делійская задача была бы рѣшена, если бы удалось построить циркулемъ и линейкой отрѣзокъ, равный $\sqrt[3]{2}$. Извѣстно *), что при помощи упомянутыхъ двухъ инструментовъ могутъ быть построены лишь такіе отрѣзки, которые выражаются черезъ данные либо раціонально, либо при помощи конечнаго числа корней, и то только квадратныхъ. Но можетъ быть, $\sqrt[3]{2}$ можетъ быть выраженъ при помощи конечнаго числа квадратныхъ корней (подобно тому, напр., какъ $\sqrt[4]{9}=\sqrt{3}$)? Отвѣтъ на это даетъ высшая алгебра слѣдующей теоремой: «если кубическое ур-іе (вообще ур-іе нечетной степени) съ цѣлыми коэффиціентами, изъ которыхъ первый **) равенъ 1, не имѣетъ корнемъ ни одного изъ дѣлителей свободнаго члена, то такое ур-іе

*) См. въ этомъ томѣ «Теор. геом. постр.».

**) т.-е. коэффиціентъ при неизвѣстномъ въ высшей степени.

неразрѣшимо въ квадратныхъ радикалахъ». Делійская задача приводитъ къ кубическому ур-ію $x^3-2=0$; легко провѣрить, что это ур-іе не удовлетворяется при $x=\pm1$ и $x=\pm2$, слѣдовательно, оно неразрѣшимо въ квадратныхъ радикалахъ, и построеніе не можетъ быть выполнено циркулемъ и линейкой.

Точныя рѣшенія.

1. *При помощи двухъ параболъ (Менехмъ,* около 300 г. до Р. Х.).

Рѣшеніе это основывается на замѣчаніи *Гиппократа Хіосскаго* (около V в. до Р. Х.), что Делійская задача есть частный случай слѣдующей: даны отрѣзки a и b—построить два среднихъ пропорціональныхъ между ними, т.-е. два такихъ отрѣзка x и y, чтобы четыре величины a, x, y и b составляли геометрическую прогрессію; въ этомъ случаѣ

$$a:x=x:y=y:b \quad . \; . \; . \; (1)$$

Въ самомъ дѣлѣ, изъ соотношенія (1) находимъ

$$x=\sqrt[3]{a^2b}, \quad y=\sqrt[3]{ab^2}.$$

Если $b=2a$ (частный случай), то отрѣзокъ $x=\sqrt[3]{2a^3}=a\sqrt[3]{2}$ и будетъ тотъ, который ищется въ Делійской задачѣ *). Въ этомъ случаѣ ур-ія (1) могутъ быть записаны такъ:

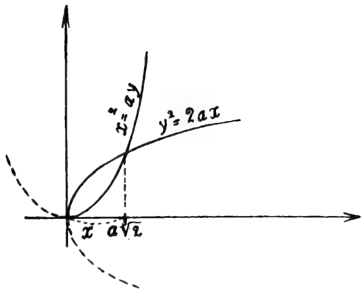
$$x^2=ay, \quad y^2=2ax \quad . \; . \; . \; (2)$$

Геометрически послѣднія уравненія выражаютъ двѣ параболы (см. черт. 188), имѣющія общую вершину въ началѣ координатъ, при чемъ первая парабола расположена симметрично по отношенію оси y-овъ, а вторая по отношенію оси x-овъ. Искомый отрѣзокъ $x=a\sqrt[3]{2}$ есть, очевидно, абсцисса той точки (отличной отъ начала координатъ), въ которой обѣ параболы пересѣкаются.

---

*) Если бы мы умѣли строить два среднихъ пропорціональныхъ между двумя данными отрѣзками, то могли бы не только удваивать, но и утраивать, учетверять и, вообще, увеличивать въ n разъ данный кубъ; достаточно было бы для этого взять $b=n.a$.

Таково построенiе Менехма, которое приведено нами, конечно, въ модернизированной формѣ—при помощи обозначенiй и терминологiи аналитической геометрiи. Построенiе это требуетъ, какъ видимъ, вычерчиванiя двухъ параболъ *). Декартъ (XVII в. по Р. Х.) указалъ существенное упрощенiе, при которомъ одна изъ параболъ замѣняется надлежащимъ образомъ выбранной окружностью.



Черт. 188.

При помощи кривыхъ высшихъ порядковъ рѣшили Делiйскую задачу два позднѣйшихъ геометра—*Дiоклесъ* и *Никомедъ* (оба около 150 г. до Р. Х.). Первый открылъ кривую 3-го порядка *циссоиду***), а второй—кривую 4-го порядка *конхоиду*, для вычерчиванiя которыхъ были придуманы простые механизмы. Не имѣя возможности изложить подробнѣе эти сравнительно сложныя построенiя, перейдемъ къ замѣчательному и, повидимому, древнѣйшему рѣшенiю, приписываемому Платону (около 400 л. до Р. Х.).

II. Рѣшенiе посредствомъ двухъ прямоугольныхъ наугольниковъ; оно основывается на слѣдующей простой теоремѣ:

«Если въ прямоугольной трапецiи дiагонали взаимно перпендикулярны, то 4 отрѣзка дiагоналей составляютъ геометрическую прогрессiю». Именно (см. черт. 189).

$$OA : OD = OD : OC = OC : OB$$

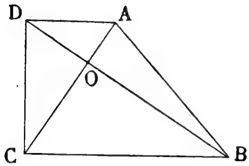
Справедливость двухъ пропорцiй ($OA : OD = OD : OC$ и $OD : OC = OC : OB$), входящихъ въ это соотношенiе, слѣдуетъ изъ свойствъ высоты прямоугольнаго треугольника, опущенной на гипотенузу.

---

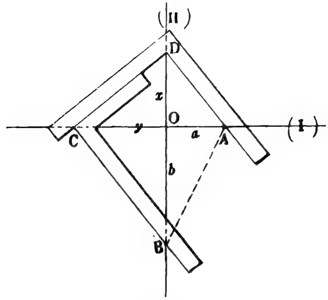
*) См. Хрест. томъ II, статью «Аналитич. геом.».

**) См. статью о замѣчательныхъ кривыхъ.

Отсюда вытекаетъ слѣдующее построеніе двухъ среднихъ пропорціональныхъ между отрѣзками a и b, при помощи прямоугольныхъ наугольниковъ. Проведя двѣ взаимно-перпендику-



Черт. 189.



Черт. 190.

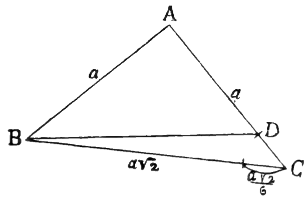
лярныя прямыя (I) и (II) (черт. 190), откладываемъ на нихъ отъ общей точки O отрѣзки $OA=a$ и $OB=b$. Теперь накладываемъ на чертежъ два прямоугольныхъ наугольника и стараемся добиться такого ихъ расположенія, при которомъ 1) наугольники соприкасаются вдоль одного катета, 2) второй катетъ одного наугольника проходитъ черезъ точку A, а второй катетъ другого—черезъ B, 3) вершина перваго наугольника лежитъ на прямой (II), а второго—на прямой (I). Если положимъ $OD=x$ и $OC=y$, то четыре отрѣзка a, x, y, и b будутъ связаны соотношеніемъ (1). Для Делійской задачи слѣдуетъ взять $b=2a$ (какъ это и сдѣлано на черт. 190).

Приближенное рѣшеніе Делійской задачи. Для практическаго черченія приближенныя построенія, при извѣстной степени точности ихъ, являются не менѣе цѣнными, чѣмъ точныя (не слѣдуетъ забывать, что и послѣднія всегда даютъ нѣкоторую ошибку, зависящую отъ несовершенства инструментовъ), но часто имѣютъ значительное преимущество въ смыслѣ простоты. Общій методъ составленія приближенныхъ рѣшеній заключается въ томъ, что подыскиваютъ выраженіе, которое бы можно было легко построить (и которое не содержало бы иныхъ ради-

каловъ, кромѣ квадратныхъ, если, конечно, желаютъ ограничиться циркулемъ и линейкой), но такъ, чтобы въ то же время такое выраженіе по величинѣ мало отличалось отъ даннаго.

Вотъ, напр., приближенное рѣшеніе Делійской задачи, принадлежащее итальянскому математику *Буонафальче*.

Строимъ прямоугольный равнобедренный треугольникъ ABC съ катетомъ $AB=AC=a$ и дѣлимъ гипотенузу $BC(=a\sqrt{2})$ на 6 равныхъ частей; одну такую часть откладываемъ на катетѣ AC отъ вершины C. Соединяя полученную такимъ образомъ точку D съ B, получимъ отрѣзокъ BD, длина котораго (изъ прямоугольнаго треугольника ABD) выразится такъ:



Черт. 191.

$$BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{a^2+\left(a-\frac{a\sqrt{2}}{6}\right)^2}=\frac{1}{6}a\sqrt{74-12\sqrt{2}}=$$
$$=a\,.\,1{,}25863\ldots$$

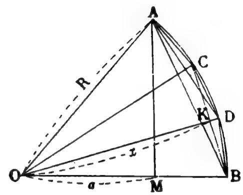
Замѣчая, что въ Делійской задачѣ ребро искомаго куба имѣетъ величину $a\sqrt[3]{2}=a\,.\,1{,}2599$, видимъ, что отрѣзокъ BD можно приближенно принять за требуемый, при чемъ ошибка не превзойдетъ 0,002 стороны даннаго куба.

Трисекція угла.

Задача о раздѣленіи угла на три равныя части столь же древняго происхожденія, какъ и Делійская задача. Она возникла естественнымъ образомъ изъ болѣе общей задачи о раздѣленіи даннаго угла на любое число равныхъ частей. Послѣ того, какъ дѣленіе угла пополамъ оказалось не представляющимъ затрудненія, естественно было обратиться къ трисекціи— и здѣсь обнаружились непреодолимыя трудности. Вѣроятно

много путей было уже безплодно испытано, когда *Гиппiй Элейскiй* (около 420 г. до Р. Х.) предложилъ воспользоваться для трисекцiи угла открытой имъ трансцедентной кривой «квадратриксой»; надо замѣтить, что къ пользованiю высшими кривыми греческiе геометры прибѣгали съ крайней неохотой и въ исключительныхъ случаяхъ. Попытки найти построенiе, осуществляемое циркулемъ и линейкой, продолжались, но безуспѣшно—по причинѣ, о которой мы уже упоминали.

Постараемся уяснить себѣ, откуда проистекаетъ невозможность трисекцiи произвольнаго угла при помощи циркуля и линейки. Будемъ рѣшать задачу алгебраическимъ методомъ. Пусть AOB данный уголъ, OC и OD—прямыя, дѣлящiя его на три равныя части. Изъ точки O, какъ изъ центра, опишемъ дугу AB произвольнымъ радiусомъ R. Обозначимъ величину проекцiи OM радiуса OA на радiусъ OB буквой a, а за неизвѣстное x примемъ величину проекцiи радiуса OC на радiусъ OD. Вычислимъ стороны и дiагонали трапецiи $ACDB$; согласно теоремѣ «хорда есть средняя пропорцiональная между дiаметромъ, проходящимъ черезъ конецъ хорды и прилежащимъ къ дiаметру отрѣзкомъ (т.-е. проекцiей хорды на этотъ дiаметръ), имѣемъ



Черт. 192.

$$AB=\sqrt{2R(R-a)} \text{ и } AC=CD=DB=\sqrt{2R(R-x)};$$

далѣе,
$$AD=BC=2BK=2\sqrt{R^2-x^2}.$$

Примѣняя теперь къ четыреугольнику $ACBD$, вписанному въ окружность, теорему Птоломея ($AB \,.\, CD+AC \,.\, BD=AD \,.\, BC$), найдемъ

$$\sqrt{2R(R-a)}\sqrt{2R(R-x)}+(\sqrt{2R(R-x)})^2=(2\sqrt{R^2-x^2})^2.$$

Освободившись отъ радикаловъ, сокращаемъ на $2(R-x)$, что законно, такъ какъ $x \neq R$; послѣ приведенія получимъ:

$$4x^3-3R^2x-R^2a=0 \quad . \ . \ . \ (1)$$

Итакъ, мы пришли къ кубическому уравненію. Отсюда еще преждевременно заключать, что трисекція угла невыполнима циркулемъ и линейкой; если бы оказалось, что уравненіе (1) всегда разрѣшимо въ квадратныхъ радикалахъ, то отсюда вытекала бы, наоборотъ, возможность такого построенія. Однако легко указать случаи, когда уравненіе (1) въ квадратныхъ радикалахъ неразрѣшимо.

Пусть, напр., $AOB=60°$; тогда $a=\frac{R}{2}$ (такъ какъ въ треугольникѣ AOM катетъ OM лежитъ противъ угла въ 30°), и уравненіе (1) принимаетъ видъ

$$4x^3-3R^2x-\tfrac{1}{2}R^3=0 \quad . \ . \ . \ (2)$$

Полагая $x=\frac{1}{2}Ry$ (чтобы сдѣлать коэффиціентъ при x^3 равнымъ 1 и освободиться отъ R), получимъ для новаго неизвѣстнаго y уравненіе:

$$y^3-3y-1=0 \quad . \ . \ . \ (3)$$

Согласно теоремѣ, приведенной выше (на стр. 200), это уравненіе было бы разрѣшимо въ квадратныхъ радикалахъ только въ томъ случаѣ, если бы оно имѣло корнемъ +1 или —1. Такъ какъ этого нѣтъ, то уравненіе (3), а слѣдовательно, и уравненіе (2) въ квадратныхъ радикалахъ неразрѣшимо—*трисекція угла въ 60° при помощи циркуля и линейки невозможна* *).

Приведенный примѣръ имѣетъ рѣшающее значеніе; онъ показываетъ прежде всего, что *общее* рѣшеніе задачи о трисекціи угла циркулемъ и линейкой немыслимо; въ противномъ случаѣ мы умѣли бы раздѣлить на три равныя части и уголъ въ 60°. Болѣе подробное изслѣдованіе показываетъ, что углы, трисекція

*) Другими словами, нельзя построить циркулемъ и линейкой угла въ 20°; отсюда, между прочимъ, вытекаетъ невозможность построить (обычными средствами) правильный девятиугольникъ.

которыхъ выполнима при помощи циркуля и линейки, представляютъ собою счастливыя исключенія. Таковъ, напр., уголъ въ 90° (для котораго $a=0$; въ этомъ случаѣ уравненіе (1) немедленно распадется на два—линейное и квадратное), а слѣдовательно и всѣ углы типа $\frac{90^\circ}{2^n}$.

Итакъ, поскольку рѣчь идетъ о трисекціи *произвольнаго* угла, точное рѣшеніе возможно только при помощи высшихъ средствъ. Такія рѣшенія были извѣстны уже въ глубокой древности; къ изложенію простѣйшихъ изъ нихъ мы и перейдемъ.

Точныя рѣшенія.

Докажемъ предварительно слѣдующую лемму:

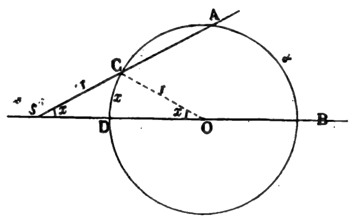
Лемма. *Если къ окружности, изъ точки, лежащей внѣ ея, проведены двѣ сѣкущія—одна черезъ центръ, а другая такъ, что внѣшній ея отрѣзокъ равенъ радіусу окружности, то уголъ между сѣкущими измѣряется третьей частью большей изъ дугъ, заключенныхъ между его сторонами.*

Доказательство. Согласно условію (см. черт. 193)

$$SC=OC=r,$$

вслѣдствіе чего

$$\angle CSO=\angle COS=x$$
$$\text{и} \smile CD=x.$$



Черт. 193.

По извѣстной теоремѣ объ углѣ, вершина котораго лежитъ внѣ окружности, имѣемъ:

$$\angle CSO \text{ измѣряется выраженіемъ } \frac{\smile AB - \smile CD}{2};$$

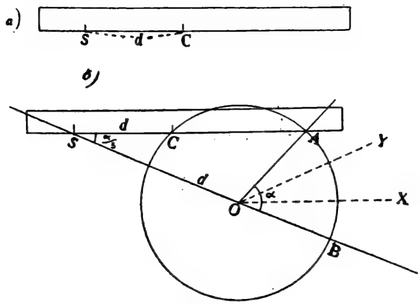
обозначая черезъ α величину дуги AB, получимъ

$$x=\frac{\alpha - x}{2}, \text{ откуда } x=\frac{\alpha}{3}.$$

На этой леммѣ прямо или косвенно основаны, въ сущности, всѣ три нижеслѣдующія построенія.

1) Рѣшеніе при помощи *бумажной полоски съ двумя черточками*; его приписываютъ Архимеду. Инструментъ, который здѣсь присоединяется къ обычнымъ, чрезвычайно простъ—это полоска бумаги (достаточно длинная *)) съ двумя нанесенными на ней черточками (см. черт. 194 сверху).

Пусть требуется раздѣлить на 3 равныя части уголъ $AOB=\alpha$



Черт. 194.

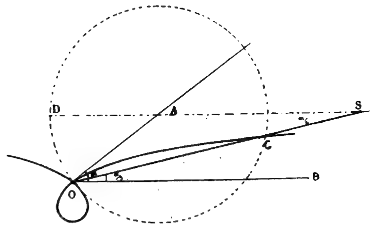
(черт. 194). Изъ вершины его O описываемъ окружность радіусомъ d, равнымъ разстоянію между черточками S и C на полоскѣ, и пусть окружность эта пересѣчетъ стороны даннаго угла α въ точкахъ A и B. Теперь придадимъ (чего легко достигнуть послѣ нѣсколькихъ испытаній) бумажной полоскѣ такое положеніе, чтобы 1) точка S лежала на продолженіи отрѣзка BO, 2) точка C на окружности, и 3) край SC полоски проходилъ черезъ точку A. Согласно предыдущей леммѣ, $\angle ASB=\frac{1}{3}\alpha$. Теперь остается провести $OX \| SA$ и раздѣлить уголъ AOX прямою OY пополамъ.

2) Построеніе при помощи *конхоиды Никомеда*. Если бы въ предыдущемъ построеніи, отыскивая требуемое положеніе бумажной полоски, мы поступили такъ: точку S передвигали бы вдоль прямой OB, слѣдя при этомъ, чтобы край SC полоски все время проходилъ черезъ точку A, то при этомъ движеніи

*) Для нашего построенія достаточно, чтобы длина полоски была въ пять разъ больше, чѣмъ разстояніе между черточками. Смыслъ этого требованія легко уясняется изъ дальнѣйшаго текста.

точка C описала бы ссобую кривую вѣтвь—ранѣе упомянувшуюся конхоиду Никомеда. Конхоида эта имѣетъ прямую OB основаніемъ, точку A полюсомъ и разстояніе d (отрѣзокъ OA) интерваломъ *).

Пусть, какъ прежде, требуется произвести трисекцію угла α, вершину котораго обозначимъ буквой O (черт. 195). Возьмемъ на одной изъ сторонъ угла произвольную точку A, проведемъ окружность $A(O)$ и прямую AS, параллельную другой сторонѣ OB угла α. Если теперь построить конхоиду, имѣющую основаніемъ прямую AS, полюсомъ—точку O и интерваломъ—длину OA, то пересѣченіе окружности съ конхоидой дастъ точку C такого рода, что $\angle COB=\frac{\alpha}{3}$. Дѣйствительно, по свойству конхоиды, отрѣзокъ CS=интервалу AO $(=d)$=радіусу окружности, откуда, согласно леммѣ,



Черт. 195.

$$\angle DSO=\frac{\smile OD}{3}=\frac{\angle DAO}{3};$$

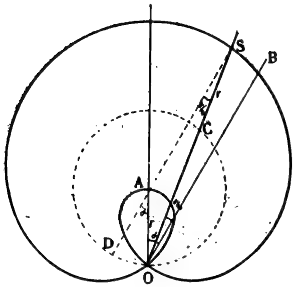
но $\angle DSO=\angle COB$ и $\angle DSO=AOB=\alpha$, слѣд. $\angle COB=\frac{\alpha}{3}$.

Изложенное построеніе имѣетъ на практикѣ тотъ недостатокъ, что для каждаго даннаго угла требуется строить особую конхоиду. Этого недостатка лишено построеніе при помощи другой высшей кривой, т. наз. *улитки Паскаля;* къ изложенію этого псстроенія мы и перейдемъ.

---

*) Интервалъ въ данномъ случаѣ откладывается въ направленіи отъ основанія къ полюсу. См. статью о замѣчательныхъ кривыхъ.

3) Построеніе при помощи *Паскалевой улитки**) опять-таки легко связать съ построеніемъ посредствомъ бумажной полоски.



Черт. 196.

Именно, приспособляя послѣднюю, мы могли бы дѣйствовать такъ: передвигать точку C вдоль окружности, слѣдя при этомъ, чтобы край SC все время проходилъ черезъ точку A. При такомъ передвиженіи, точка S описала бы улитку Паскаля.

Пусть въ плоскости чертежа дана какая-нибудь Паскалева улитка и отмѣченъ центръ A окружности, которая служила для ея построенія. Если теперь перенесемъ уголъ α, подлежащій трисекціи, въ положеніе AOB, затѣмъ черезъ точку A проведемъ прямую, параллельную OB до пересѣченія съ улиткой въ точкѣ S, то прямая SO раздѣлитъ уголъ AOB въ отношеніи $1:2$. Дѣйствительно, по свойству улитки, $SC=r$, а потому примѣнима лемма, въ силу которой

$$\angle DSO=\frac{\smile OD}{3}=\frac{\angle DAO}{3}.$$

Но $\angle DSO=\angle SOB$ и $\angle DAO=\angle AOB=\alpha$ слѣд. $\angle SOB=\frac{\alpha}{3}$.

Квадратура круга.

Изъ трехъ задачъ, завѣщанныхъ намъ древностью, квадратура круга является, пожалуй, самой популярной. О ней часто можно услышать и изъ устъ не-математика, какъ о синонимѣ труднаго, почти безнадежнаго дѣла. Впрочемъ, это пережитокъ прош-

*) См. статью о замѣчательныхъ кривыхъ.

лаго, хотя и недавняго; тогда убѣжденіе въ неразрѣшимости квадратуры круга проистекало только изъ безплодности всѣхъ предшествовавшихъ попытокъ, но не имѣло еще современнаго научнаго обоснованія.

Въ 1775 г. Парижская Академія Наукъ, объявляя, что отнынѣ не будетъ разсматривать рѣшеній задачи о квадратурѣ круга, не могла еще мотивировать свой отказъ съ полной убѣдительностью. Тогда «квадратурщики» были просто самонадѣянными людьми, теперь это—невѣжды.

«Построить квадратъ, площадь котораго равна площади даннаго круга»—на первый взглядъ все здѣсь ясно и понятно даже не-математику. На самомъ же дѣлѣ отдать себѣ ясный отчетъ въ математическомъ содержаніи задачи далеко не просто; это происходитъ отъ присутствія въ условіи задачи понятія о площади криволинейной фигуры (въ данномъ случаѣ—круга). Это понятіе можетъ быть строго обосновано только при помощи другого понятія, наиболѣе тонкаго и отвлеченнаго въ элементарной математикѣ—понятія о предѣлѣ. Отъ неясности этого понятія у древнихъ изслѣдованіе квадратуры круга долго не могло стать на правильный путь. Вотъ, напримѣръ, какъ современникъ Сократа *Антифонъ* «доказываетъ» возможность квадратуры круга. Кругъ, по его опредѣленію, есть многоугольникъ (правильный) съ безконечнымъ числомъ сторонъ; поэтому, для нахожденія площади круга, вписываемъ въ него многоугольники съ все большимъ числомъ сторонъ и продолжаемъ этотъ процессъ, пока не «исчерпается» площадь круга. Наконецъ, «такъ какъ для каждаго многоугольника можно построить равновеликій ему квадратъ, то слѣдовательно можно построить квадратъ, площадь котораго равна площади круга».—Разсужденіе это не безупречно во многихъ пунктахъ, но заключительная мысль во всякомъ случаѣ представляетъ грубый логическій скачокъ.

Прошло полтора вѣка, пока Архимедъ, опираясь на окрѣпшій къ тому времени «методъ исчерпыванія» (соотвѣтствующій нынѣшнему «методу предѣловъ») придалъ разсужденіямъ Антифона научный вѣсъ. Пользуясь тѣми же правильными многоугольниками, онъ доказалъ, 1) что кругъ равновеликъ прямоугольному треугольнику, у котораго одинъ катетъ равенъ ра-

діусу, а другой—длинѣ окружности (въ современныхъ обозначеніяхъ этому соотвѣтствуетъ тождество: $\pi r^2 = \frac{1}{2} r \cdot 2\pi r$) и 2) что длина окружности въ опредѣленное число разъ (приблизительно (съ избыткомъ) въ $3\frac{1}{7}$ раза) больше своего діаметра. Съ этого момента исторія квадратуры круга сливается съ исторіей числа π, выражающаго*) отношеніе длины окружности къ діаметру. Въ самомъ дѣлѣ, если бы мы умѣли построить отрѣзокъ въ π разъ большій діаметра, т.-е. построить длину окружности, то сразу превратили бы (согласно первому изъ приведенныхъ выше предложеній Архимеда) кругъ въ равновеликій прямоугольный треугольникъ, а затѣмъ—по извѣстному правилу—треугольникъ въ квадратъ. Обратно, имѣя квадратъ, равновеликій кругу и идя обратнымъ путемъ, мы легко построили бы длину скружности. Такимъ образомъ обѣ задачи—«квадратура круга» и «спрямленіе окружности»—тѣсно связаны между собой.

Еслибы число π было раціональнымъ, то спрямленіе окружности не представляло бы затрудненій, такъ какъ умноженіе и дѣленіе отрѣзковъ выполнимо при помощи циркуля и линейки. Однако, и въ случаѣ ирраціональности числа π, спрямленіе окружности было бы выполнимо обычными средствами, если бы π выражалось при помощи конечнаго числа радикаловъ и притомъ только квадратныхъ. Для такого выраженія—какъ это нетрудно провѣрить—всегда можно подобрать уравненіе съ цѣлыми коэффиціентами, однимъ изъ корней котораго оно является. Такъ возникъ (уже въ недавнее время) болѣе общій вопросъ относительно π, а именно—можетъ ли число π служить корнемъ алгебраическаго уравненія или нѣтъ? На современномъ математическомъ языкѣ вопросъ этотъ формулируется такъ: является ли число π алгебраическимъ или трансцендентнымъ?

Къ рѣшенію этихъ основныхъ вопросовъ—сначала объ ирраціональности, а затѣмъ о трансцендентности числа π, сознательно или безсознательно, шли всѣ серьезные геометры, искавшіе

---

*) Слѣдуетъ отмѣтить, что отношеніе длины окружности къ діаметру долгое время не имѣло спеціальнаго обозначенія. Символъ π сравнительно недавняго происхожденія—онъ введенъ въ науку *Эйлеромъ* (1707—1783).

квадратуру круга. Подъ этимъ угломъ зрѣнія, мы перечислимъ главные этапы въ исторіи числа π, начиная съ Архимеда и слѣдуя хронологическому порядку.

III в. до Р. Хр. *Архимедъ* находитъ для π приближенное значеніе $\frac{22}{7}$ ($=3,14285\ldots$ въ то время, какъ на самомъ дѣлѣ $\pi=3,14159\ldots$), пользуясь правильными вписанными и описанными многоугольниками. Методъ Архимеда остается основнымъ для всѣхъ послѣдующихъ вычислителей вплоть до появленія анализа безк.-малыхъ; этотъ же методъ перешелъ въ современные элементарные учебники.

II в. до Р. Хр. Астрономъ *Клавдій Птоломей* даетъ для π болѣе точное значеніе, которое въ принятой имъ шестидесятиричной системѣ счисленія выражается такъ: $3^{\circ}3'30''$, т.-е.

$$3+\frac{3}{60}+\frac{30}{60^2}=3\frac{17}{120}=3,14166\ldots$$

V. в. по Р. Хр. Индусскій математикъ *Арьябхатта* предлагаетъ для π значеніе $\frac{3927}{1250}=3,1416$. Это дѣйствительно замѣчательное для того времени приближеніе позднѣйшие индусскіе математики считали точнымъ отношеніемъ длины окружности къ діаметру; они же пользовались, когда не требовалось особой точности, легко запоминаемымъ выраженіемъ: $\pi=\sqrt{10}=3,16\ldots$ невѣрнымъ уже на второмъ десятичномъ знакѣ.

XVI в. по Р. Хр. ознаменовался двумя крупными событіями въ исторіи числа π. Голландскій инженеръ *Адріанъ Мецій* нашелъ для π приближенное значеніе, далеко оставляющее позади всѣ предшествующія, и уже вполнѣ достаточное для нуждъ практики. Это значеніе $\frac{355}{113}=3,1415929..$ неправильно только на 7-мъ десятичномъ знакѣ.—Другой крупный и теоретически-важный шагъ сдѣлалъ основатель современной алгебры *Віета*, давъ впервые точное аналитическое выраженіе для площади круга. Именно, если діаметръ круга принять рав-

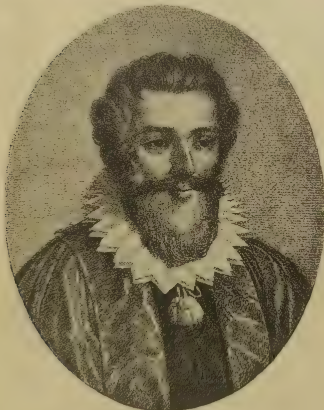
нымъ 1, то площадь его можетъ быть представлена въ видѣ

$$1 : \left(2\sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}} \cdots\right),$$

откуда

$$\pi = 2\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}} \cdots\right).$$

Віета не задается вопросомъ о сходимости найденнаго имъ безконечнаго произведенія, какъ того требуетъ современная математическая строгость; однако, позднѣйшими математиками доказано, что формулы его справедливы. Для вычисленія π съ большой точностью, формула Віеты неудобна; самъ онъ нашелъ для π предѣлы 3,1415926535 и 3,1415926537, но уже съ помощью традиціоннаго Архимедова метода.



Франсуа Віета.
(1540—1693).

Къ этому времени вычисленіе π со многими десятичными знаками пріобрѣтаетъ въ рукахъ второстепенныхъ математиковъ нѣсколько спортивный характеръ, не оправдываемый ни практическими, ни теоретическими соображеніями. Вслѣдъ за *Адріаномъ Романскимъ*, вычислившимъ при помощи 2^{30}-угольника 17 десятичныхъ знаковъ числа π, голландскій математикъ *Лудольфъ ванъ Цейленъ* опредѣляетъ сначала 20, а затѣмъ 32 правильныхъ десятичныхъ знака. Поразительное терпѣніе этого вычислителя было оцѣнено потомками: число π долгое время, особенно въ германскихъ странахъ, носило названіе «Лудольфова числа».

XVII в. по Р. Хр. Голландскіе физико-математики *Снеллій* и *Гюйгенсъ* вносятъ свѣжую струю въ вычислительную работу своихъ предшественниковъ; они задаются вопросомъ, цѣлесообразно ли, рабски слѣдуя методу Архимеда, прибѣгать къ многоугольникамъ съ такимъ колоссальнымъ числомъ сторонъ—и дѣйствительно находятъ значительныя упрощенія. Такъ Гюйгенсъ уже при помощи 60-угольника вычисляетъ правильно 9 десятичныхъ знаковъ (по методу Архимеда ихъ получилось бы 2).

Гораздо важнѣе были изслѣдованія другого рода, которыя шли по пути, намѣченному Віетой. Нарождающійся анализъ безконечно-малыхъ далъ могучее орудіе для *аналитическаго* изслѣдованія числа π—при помощи безконечныхъ рядовъ, произведеній и непрерывныхъ дробей. Одна за другой появились слѣдующія формулы

Валлиса (1616—1703)

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots\cdots,$$

Броункера (1620—1684)

$$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cfrac{81}{2+\cfrac{121}{2+\ldots,}}}}}}$$

Лейбница (1646—1716)

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\ldots.$$

«Вычислители» снова получили благодарный матеріалъ, заставившій ихъ забыть правильные многоугольники. Теперь англійскому математику *Машину* не стоило большого труда вычислить π съ 100 десятичными знаками *).

XVIII в. по Р. Хр. При помощи безконечныхъ рядовъ и комплексныхъ чиселъ, *Эйлеръ* (1707—1783) установилъ замѣчатель-

---

*) Рекордъ въ этой области установленъ недавно *Шенксомъ*; онъ вычислилъ 700 десятичныхъ знаковъ.

ную зависимость между числами e (основанiе натуральныхъ логариѳмовъ) и π:

$$e^{2\pi i} = 1, \text{ гдѣ } i = \sqrt{-1};$$

онъ же далъ для обоихъ этихъ чиселъ нѣсколько изящныхъ разложенiй въ ряды и въ непрерывныя дроби. Отнынѣ судьбы чиселъ e и π оказались тѣсно связанными; эта плодотворная связь привела въ недавнее время къ окончательному выясненiю природы числа π.

Формулами Эйлера воспользовался швейцарскiй математикъ *Ламбертъ* (1728—1777) для доказательства того, что уже предвидѣлось ранѣе, а именно иррацiональности числа π. Этимъ былъ положенъ предѣлъ продолжавшимся еще и въ то время попыткамъ дать «точную величину» числа π.

XIX вѣкъ принесъ окончательное разрѣшенiе вопроса о характерѣ числа π. Послѣ того, какъ *Лежандръ* (1752—1833) доказалъ, что не только π, но и π^2 есть ирацiональное число, онъ имѣлъ уже основанiе высказать слѣдующую догадку: «представляется вѣроятнымъ, что число π даже не принадлежитъ къ классу алгебраическихъ иррацiональностей, т.-е., что оно не можетъ быть корнемъ никакого алгебраическаго уравненiя съ конечнымъ числомъ членовъ, коэффицiенты котораго рацiональны. Но эту теорему повидимому очень трудно строго доказать»... Другими словами, Лежандръ догадывался уже, что π—число трансцендентное. Подтвержденiе этой генiальной догадки не заставило себя долго ждать; въ 1873 г. *Эрмитъ* доказалъ трансцедентность числа e, а въ 1882 г., идя по тому же пути, *Линдеманъ* доказалъ то же самое для числа π. Спустя 3 года, великiй *Вейерштрассъ* объединилъ оба доказательства при помощи упомянутой выше формулы Эйлера.

Мы уже говорили, каковы геометрическiя послѣдствiя трансцедентности числа π. Это обстоятельство показало, что спрямленiе окружности, а, слѣдовательно, и квадратура

круга невозможна при помощи циркуля и линейки. И не только при помощи этихъ инструментовъ; въ противоположность задачамъ Делійской и о трисекціи угла, квадратура круга неосуществима до тѣхъ поръ, пока мы ограничиваемся инструментами, вычерчивающими какія бы то ни было алгебраическія (т.-е выражаемыя алгебраическими уравненіями съ цѣлыми коэффиціентами) кривыя.

Что касается трансцендентныхъ (не алгебраическихъ)кривыхъ, то примѣнимость нѣкоторыхъ изъ нихъ къ квадратурѣ круга была извѣстна уже древнимъ грекамъ. Такъ, ученикъ Платона *Диностратъ* указалъ на возможность осуществить квадратуру круга при помощи трансцендентной кривой «квадратриссы», открытой Гиппіемъ Элейскимъ(см. статью о кривыхъ). Такихъ трансцендентныхъ кривыхъ можно придумать сколько угодно; однако, сложность вычерчивающихъ ихъ инструментовъ лишаетъ эти построенія практической цѣнности. Послѣдней, наоборотъ, въ высокой степени обладаютъ нѣкоторыя *приближенныя* построенія, съ которыми мы имѣемъ въ виду ознакомить читателя.

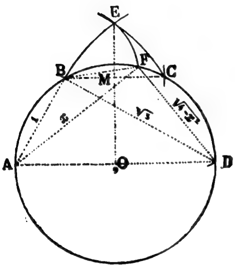
Приближенныя рѣшенія. Первый памятникъ математической литературы—Папирусъ Ринда, составленный, какъ было упомянуто въ I томѣ хрестоматіи, египтяниномъ Ахмесомъ приблизительно за 2000 лѣтъ до Р. Хр.,—уже содержитъ приближенную квадратуру круга. Тѣмъ замѣчательнѣе, что квадратура эта обладаетъ точностью, весьма значительной для того времени и достаточной для грубыхъ (напр. землемѣрныхъ) построеній.

Папирусъ Ринда безъ всякихъ доказательствъ даетъ слѣдующее правило, найденное, вѣроятно, опытнымъ путемъ: «площадь круга равна площади квадрата, у котораго сторона есть діаметръ круга, уменьшенный на $\frac{1}{9}$ своей длины».

Приведя это древнѣйшее построеніе, имѣющее теперь только историческій интересъ, перейдемъ къ современнымъ, болѣе точнымъ. Чтобы имѣть правильное сужденіе объ ихъ цѣнности, слѣдуетъ имѣть въ виду, что предѣльной для нашихъ инструментовъ является точность въ $\frac{1}{10}$ mm.; построенія, даю-

щія ошибку (теоретическую), меньшую $\frac{1}{10}$ mm., практически не отличаются объ абсолютно-точныхъ.

1) *Построеніе Маскерони* замѣчательно тѣмъ, что производится однимъ циркулемъ (который, какъ извѣстно, является болѣе точнымъ инструментомъ, чѣмъ линейка). Исходя изъ произвольной точки A окружности, строимъ послѣдовательно точки B, C и D, образующія, вмѣстѣ съ A, четыре вершины правильнаго вписаннаго въ окружность шестиугольника. Для этого достаточно изъ точки A, какъ изъ центра, сдѣлать на данной окружности засѣчку радіусомъ, равнымъ радіусу окружности; затѣмъ повторить то же построеніе, исходя изъ точки B и т. д. Проводимъ окружности $A(C)$ и $D(B)$, которыя пересѣкутся въ точкѣ E. Если теперь провести дугу окружности $B(E)$ до пересѣченія съ данной окружностью въ точкѣ F, то разстояніе AF приближенно представитъ длину четверти окружности.



Черт. 197.

Доказательство. Примемъ радіусъ окружности за единицу. Изъ прямоугольнаго треугольника AOE, въ которомъ $AE=AC$ (сторона прав. впис. треугольника)$=\sqrt{3}$ и $AO=1$, находимъ: $EO=$ $=\sqrt{(\sqrt{3})^2-1^2}=\sqrt{2}$. Если вычесть изъ EO апоѳему OM прав. вписаннаго шестиугольника, равную $\frac{\sqrt{3}}{2}$, то получимъ: $EM=$ $=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Замѣчая, что $BM=\frac{1}{2}$, найдемъ изъ прямоугольнаго треугольника BME, что $BE = \sqrt{\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} =$ $=\sqrt{3-\sqrt{6}}$. Если, наконецъ, обозначимъ отрѣзокъ AF, под-

лежащій вычисленію, черезъ x, то стороны и діагонали четыре угольника $ABFD$ выразятся такъ:

$AB=1$, $AD=2$, $BF=BE=\sqrt{3-\sqrt{6}}$, $FD=\sqrt{4-x^2}$ *), $AF=x$, и $BD=\sqrt{3}$.

Примѣняя къ вписанному четыреугольнику $ABFD$ теорему Птоломея ($AB \,.\, FD+BF \,.\, AD=AF \,.\, BD$), получимъ:

$$1 \,.\, \sqrt{4-x^2}+\sqrt{3-\sqrt{6}} \,.\, 2=x\sqrt{3}.$$

Освобождаясь отъ радикала $\sqrt{4-x^2}$, дѣлая приведеніе и сокращая на 4, получимъ квадратное уравненіе

$$x^2-x\sqrt{9-3\sqrt{6}}-(\sqrt{6}-2)=0;$$

положительный корень этого ур-ія будетъ

$$x_1=\frac{1}{2}\left(\sqrt{9-3\sqrt{6}}+\sqrt{1+\sqrt{6}}\right)=1{,}5712\ldots$$

Истинная же длина четверти окружности (при радіусѣ $=1$) есть

$$\frac{\pi}{2}=1{,}5707\ldots$$

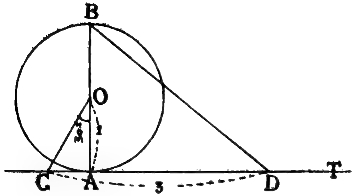
Отсюда видно, что ошибка въ построеніи Маскерони меньше $\frac{6}{10.000}$ части радіуса; если послѣдній не превосходитъ, напр., 1 дециметра, то ошибка будетъ меньше $\frac{1}{10}$ mm.

2) Слѣдующее построеніе (циркулемъ и линейкой) даетъ еще меньшую теоретическую ошибку. Пусть дана окружность съ центромъ O; проводимъ діаметръ AB и касательную AT. Изъ

---

*) Равенство $FD=\sqrt{4-x^2}$ выводится изъ прямоуг. тр-ка AFD, гдѣ $AD=2$ и $AF=x$.

центра O, подъ угломъ въ 30° къ радіусу OA, проводимъ прямую и отъ точки C ея пересѣченія съ касательной AT откладываемъ на послѣдней отрѣзокъ CAD, равный 3 радіусамъ. Тогда BD приближенно представитъ длину полуокружности. Дѣйствительно, $AC = \frac{1}{2} OC$ такъ что изъ прямоугольнаго треугольника OAC имѣемъ:



Черт. 198.

$AC^2 + 1 = (2AC)^2$, слѣд. $AC = \sqrt{\frac{1}{3}}$, $AD = 3 - \sqrt{\frac{1}{3}}$, а изъ прямоугольнаго треугольника ABD получимъ:

$$BD = \sqrt{2^2 + \left(3 - \sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{120 - 18\sqrt{3}} = 3,141533....$$

Сравнивая этотъ результатъ съ дѣйствительной длиной полуокружности

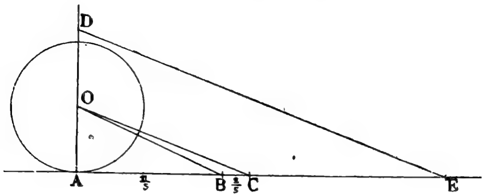
$$\pi = 3,14159....$$

видимъ, что теоретическая ошибка въ нашемъ построеніи составляетъ около $\frac{6}{100000}$ радіуса, такъ что становится ощутимой только при радіусѣ, большемъ 1 метра.

3) Построеніе *Шпехта* приводитъ къ еще болѣе точнымъ результатамъ. Проводимъ діаметръ и касательную черезъ точку A окружности. На касательной откладываемъ $AB = \frac{11}{5}$ и $BC = \frac{2}{5}$ радіуса, на продолженномъ діаметрѣ откладываемъ $AD = OB$ и, наконецъ, проводимъ $DE \| OC$. Тогда AE приближенно воспроизведетъ длину окружности.

Дѣйствительно, изъ прямоугольнаго треугольника OAB находимъ:

$$OB=\sqrt{1+\left(\frac{11}{5}\right)^2}=\frac{1}{5}\sqrt{146}.$$



Черт. 199.

Замѣчая, что $AC=\frac{13}{5}$ радіуса, изъ пропорціи $\frac{AO}{AD}=\frac{AC}{AE}$ найдемъ, что

$$AE=\frac{13}{25}\sqrt{146}=6,283184\ldots,$$

въ то время какъ истинная длина окружности есть

$$2\pi=6,283185\ldots.$$

Ошибка можетъ стать замѣтной лишь при радіусѣ въ 50 метровъ.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ИЗЪ КАТАЛОГА
„СОТРУДНИКЪ ШКОЛЪ А. К. ЗАЛѢССКОЙ“.

МОСКВА, Воздвиженка, д. Армандъ.

БОГОЛѢПОВЪ, П. Сборникъ устныхъ и письменныхъ ариеметическихъ задачъ. 8-е изд. Ц. 40 к.
Мин. Нар. Просв. допущено въ качествѣ учебнаго пособія въ низшихъ училищахъ.

БОППЪ. Метрическая система. Стѣнная таблица съ объяснительнымъ текстомъ. Ц. 75 к.
Мин. Нар. Просв. включено въ каталогъ книгъ для низшихъ училищъ.

БУХАРЕВЪ. Руководство къ счетамъ того же автора.

БУЦЕВИЧЪ. Собраніе геометрическихъ задачъ на построеніе. Составилъ по Бекелю, Каталану, Рейноду и пр. Ц. 75 к.

БѢЛОЦЕРКОВСКІЙ. Сборникъ алгебраическихъ уравненій съ рѣшеніями и объясненіями каждаго типа. Пособіе для учащихся средней школы, экстерновъ и конкурсантовъ. Ц. 20 к.

ВИНОГРАДОВЪ. Ариемет. упражн. и задачи для приготовит. клас. средн. уч. завед. и начальн. шк. Ц. 35 к.

ГАЛАНИНЪ. Методика ариеметики. Ч. I. Ц. 50 к.
— То же. Ч. II. Ц. 50 к.
— **Начальная алгебра въ связи съ пропедевт. курсомъ геометріи.** Ц. 75 к.
— **Введеніе къ методикѣ ариеметики.** Пособіе для прохожденія методики въ 8 кл. ж. гимн. и учит. семин. Ц. 80 к.

ИВАНОВЪ, А. Начальная алгебра въ кратк. излож. и собр. задачъ, для торговыхъ школъ, вечернихъ классовъ и самообразованія. 80 к.

ИЗВОЛЬСКІЙ, Н. Геометрія на плоскости (планим.). Ц. 1 р. 20 к.
Во французскомъ журналѣ «L'Enseignement Mathématique» № 3, 15 Mai 1912 дана рецензія на полный курсъ геометріи: J'ajouterai, en terminant, que les définitions sont toujours très claires et les démonstrations fort bien présentées... Et cela rend fort attrayante la lectur de son livre.
Русская Школа (№ 5—6 за 1912 г.). Почтенный и разработанный до мелочей трудъ автора можетъ служить прекрасною подручною книгою для учителей, не новичковъ въ преподаваніи. Еще большую услугу окажетъ книга преподавателямъ, стремящимся отойти отъ рутины.

КАТАНОВЪ. Таблица для нагляднаго ознакомленія съ дробями. Въ краскахъ. Ц. 20 к.

КУТУЗОВЪ, Н. Наглядная геометрія. Для двухклассныхъ школъ М. Н. Пр. и другихъ начальныхъ училищъ съ повышеннымъ курсомъ, съ 200 чертежами въ текстѣ. Ц. 70 к.

ЛЕНЧЕНКО. Простѣйшій способъ рѣшенія задачъ на правила: тройное, процентовъ, учета векселей, въ связи съ метод. указаніями. Ц. 15к.

ЛИЦМАНЪ. Преподаваніе ариеметики. (Современная картина преподаванія ариеметики въ Германіи). Переводъ **Д. А. Бемъ и Р. Э. Струве** подъ редакціей **Волкова, съ предисловіемъ проф. Клейна.**

ЛЯМИНЪ. Физико-математ. хрестоматія. Т. I. Ариеметика. Ц. 1 р. 25 к.
— То же. Т. II. Алгебра Ц. 1 р. 50 к.
— То же. Т. III. Геометрія. Кн. 1-я. Ц. 1 р. 25 к. Кн. 2-я. Ц. 1 р. 25 к.
— То же. Т. IV. Тригонометрія и астрономія.
— То же. Т. V. Физика и Физико-химія. готовятся къ печати.
— **Задачи** на постр., требуем. при испыт. зрѣлости. Ц. 25 к.

МАЗИНГЪ, Н. Сборникъ задачъ по математикѣ, служившихъ во всѣхъ учебныхъ округахъ Россіи для испытанія зрѣлости въ гимназіяхъ и для выпускныхъ экзаменовъ въ реальныхъ училищахъ. Изд. 8-е, дополненное. Ц. 45 к.

НАГЛЯДНОЕ ПОСОБІЕ ПО ПЛАНИМЕТРІИ, изъ картона. 1 р. 65 к. изъ дерева 30 р.

ОСТРЕЙКО, С. П. Наглядное пособіе для стереометрич. построеній въ изящной коробкѣ. Ц. 10 р.

ПРЕОБРАЖЕНСКІЙ, П. Руководство прямолинейной тригонометріи. Изд. 2-е. Ц. 60 к.

РЕЙДТЪ. Собраніе стереометрическихъ задачъ, требующихъ примѣненія тригонометріи. Перев. Рождественской, подъ ред. Т. Ѳ. Сварячовскаго. Ц. 25 к.

РУКОВОДСТВО КЪ УПОТРЕБЛЕНІЮ АРИѲМЕТИЧЕСКАГО ЯЩИКА съ рядомъ систем. пробныхъ уроковъ. Ц.

СВАРИЧОВСКІЙ, Т. Методическ. сборникъ ариеметич. задачъ, раздѣл. по типамъ, съ рѣшен. Ц. 20 к.
— **Методическій сборникъ геометрическихъ задачъ на тѣла вращенія.** Ц. 50 к.
— **Атласъ діаграммъ** для нагляднаго преподаванія геометріи по лабораторному методу. Ц. 60 к.

СВАРИЧОВСКІЙ, Т. Ариемоскопъ. Описаніе и указаніе способа примѣненія прибора при школьномъ преподаваніи. Ц. 10 к.

СТАРОГРАДСКІЙ, И. Задачи на числа первой сотни. Вып. I. Изд. 2-е, исправленное и дополненное. Ц. 15 к.
— **Задачи на числа любой величины.** Вып. II. Изд. 2-е, исправленное и дополненное. Ц. 20 к.
Мин. Нар. Просв. допущено въ библ. сельск. нач. народн. училищъ.

ТАБЛИЦА УМНОЖЕНІЯ И ПИѲАГОРОВА ТАБЛИЦА, въ двухъ краскахъ. Ц. 10 к.

ФИЛИППОВЫ, Д. и Ѳ. Сборникъ ариеметическихъ примѣровъ для начальныхъ училищъ. Вып. I. Дѣйствія до 20, на круглые десятки до 100. Счетъ до 100. Ц. 10 к.
— Вып. II. Первая сотня. Ц. 10 к.

ХАЙЛОВЪ, Н. Сборникъ геометрическихъ задачъ. Изд. 3-е, исправленное и дополненное. Ц. 30 к.

„Сотрудникъ школъ“ А. Н. ЗАЛѢССКАЯ.

Москва, Воздвиженка, 13.

РОЗНИЧНЫЕ и ОПТОВЫЕ МАГАЗИНЫ:

книгъ, учебныхъ пособій, письменныхъ и канцелярскихъ принадлежностей.

ФАБРИКА:

глобусовъ, учебныхъ пособій, образовательныхъ игръ, физическихъ приборовъ и проч.

НАГЛЯДНЫЯ ПОСОБІЯ

по математикѣ, физикѣ и оборудованіе физическихъ кабинетовъ.

Каталогъ учебныхъ пособій высылается по первому требованію.

Имѣются въ продажѣ слѣдующія книги того же автора:

1) **Физико-Математическая хрестоматія,** т. I — Ариѳметика. Ц. 1 р. 25 к.

2) **Тоже,** т. II — Алгебра, ц. 1 р. 50 к.

3) **Тоже,** т. III — Геометрія, книга 2-ая, ц. 1 р. 25 к.

4) **Прямолинейная тригонометрія** для средне-учебныхъ заведеній. Ц. 60 к. Изд. 2-ое.

Ученымъ Комитетомъ Мин. Нар. Просв. **допущена** въ качествѣ руководства для мужскихъ гимназій.

Главн. Управл. военно-учебн. завед. **допущена** въ фундамент. библ. кадетскихъ корпусовъ.

5) **Методическій сборникъ задачъ прямолинейной тригонометріи** (съ приложеніемъ стѣнной таблицы формулъ тригонометріи). Ц. 75 к. Изд. 2-ое.

Ученымъ Комитетомъ Мин. Нар. Просв. **допущенъ** въ качествѣ пособія для средне-учебныхъ заведеній.

Главн. Управл. военно-учебн. завед. **допущена** въ фундамент. библ. кадетскихъ корпусовъ.

6) **Измѣненіе триг. функцій съ измѣненіемъ угла.** (Наглядное пособіе въ примѣненіи принципа живой фотографіи). Ц. 25 к.

Ученымъ Комитетомъ Мин. Нар. Просв. **допущено** въ качествѣ необязат. пособія для средне-учебныхъ заведеній.

7) **Приложеніе алгебры къ геометріи** для мужскихъ гимназій. Ц. 25 к.

Ученымъ Комитетомъ Мин. Нар. Просв. **допущено** въ качествѣ необязат. пособія для мужскихъ гимназій.

8) **Элементарная теорія разложенія на множителей алгебраическихъ выраженій.** Ц. 30 к.

9) **Методическій сборникъ задачъ по курсу алгебры,** ч. I. Ц. 60 к.

КНИГИ А. А. ЛЯМИНА и Т. Ѳ. СВАРИЧОВСКАГО.

1) **Методическій сборникъ геометрическихъ задачъ** на вычисленіе, ч. I — Планиметрія и ч. II — Стереометрія. Цѣна каждой части 70 коп.

2) **Учебникъ прямолинейной тригонометріи** (Составленъ примѣнительно къ программѣ Мин. Нар. Просв. отъ 26 и 30 іюня 1906 года), ч. I и ч. II. Цѣна каждой части 50 коп.

Уч. Ком. Мин. Нар. Просв. **допущенъ** въ качествѣ руководства для средне-учебныхъ заведеній.

Печатаются и готовятся къ печати

1) **Физико-Математическая хрестоматія,** т. IV. — Тригонометрія и Астрономія. т. V. — Физика и Физико-Химія.

2) **Методическій сборникъ задачъ по курсу алгебры,** ч. II и III.